



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

STUDIE STABILITNÍCH PROBLÉMŮ PRUTOVÝCH KONSTRUKCÍ

STABILITY PROBLEMS STUDY OF FRAMED STRUCTURES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JIŘÍ PIJÁK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. ROSTISLAV ZÍDEK, Ph.D.

BRNO 2014



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	B3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student Jiří Piják

Název Studie stabilitních problémů prutových konstrukcí

Vedoucí bakalářské práce Ing. Rostislav Zídek, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce 30. 11. 2013

Datum odevzdání bakalářské práce 30. 5. 2014

V Brně dne 17. 4. 2013

.....
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

- [1] EN 1990: Zásady navrhování konstrukcí
- [2] EN 1991-1-1-1: Zatížení konstrukcí – Část 1-1: Obecná zatížení – objemové tíhy, vlastní tíha a užitná zatížení pozemních staveb
- [3] EN 1993-1-1: Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby.

Zásady pro vypracování

Tématem práce je studium problematiky stability štíhlých prutů v ocelových konstrukcích. Základem je řešení Eulerova prutu. Následně se řeší reálné pruty v konstrukcích. Dalším tématem jsou způsoby analýzy prutových konstrukcí (lineární výpočet, teorie druhého řádu, využití výpočetních programů), jejich porovnání a možnosti pro statika. Využije se software dostupný na FAST VUT v Brně a platné normy ČSN EN.

.....

Ing. Rostislav Zídek, Ph.D.
Vedoucí bakalářské práce

Abstrakt

První částí se zabývá studiem ideálního, zakřiveného prutu a významem Eulerovy kritické síly.

Druhá část je věnována parametrům souvisejícími se stabilitními výpočty. Zejména je řešena problematika kritického zatížení soustavy a vzpěrných délek soustav. Dále je studována problematika imperfekcí ocelových konstrukcí a jejich zavedení do geometricky nelineárních výpočtů. Srovnání možných posudků dle ČSN EN 1993-1-1 je provedeno na jednoduchých prutech a na vybraných příčných vazbách.

Klíčová slova

Stabilita, Eulerova kritická síla, vzpěrná délka, imperfekce, geometricky nelineární výpočet, ocel

Abstrakt

In the first chapter the problem of ideal member, member with initial curvature and meaning of Euler's critical force is regarded.

Parameters of stability, mainly calculation of critical loading and buckling lengths, are studied in the second part. The same part contains comparison of results of computational programs and mechanical approach. Next attention is paid to imperfections, to possibilities of determination and comparison of results on a simple member.

Comparison of possible judgements of buckling on a simple beam and on frames according to ČSN EN 1993-1-1 is performed in the final part.

Key words

Stability, Euler's critical load, buckling length, imperfections, geometric nonlinear analysis, steel

Bibliografická citace

PIJÁK, Jiří. *Studie stabilitních problémů prutových soustav*. Brno, 2014. 64s., 0s. příl. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Rostislav Zídek, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 28. 5. 2014

.....

podpis autora

Poděkování

Chtěl bych poděkovat mému vedoucímu bakalářské práce, Ing. Rostislavu Zídkovi, Ph.D., za podporu, trpělivost a odborné vedení během zpracování této práce. Také chci poděkovat prof. Ing. Jindřichu Melcherovi, DrSc. za zapůjčení běžně nedostupných dokumentů a doc. Ing. Marcele Karmazínové, CSc. za poskytnutí výsledků ze svého osobního výzkumu.

V Brně dne 28. 5. 2014

.....
podpis autora

Obsah

1	ÚVOD.....	9
2	STABILITA OBECNĚ	10
3	IDEÁLNÍ PRUT.....	12
3.1	VZPĚRNÁ DÉLKA	17
4	REÁLNÝ PRUT.....	19
5	STABILITA PRUTOVÝCH SOUSTAV.....	23
5.1	NAVRŽENÁ VZPĚRNÁ DÉLKA - software	23
5.2	SOUČINITEL KRITICKÉHO ZATÍŽENÍ - software	24
5.3	VÝPOČET KRITICKÉHO ZATÍŽENÍ	25
5.4	VÝPOČET SOUČinitele VZPĚRNÉ DÉLKY	29
5.5	SROVNÁNÍ VÝSLEDŮ NA VYBRANÝCH PŘÍPADECH.....	29
6	MOŽNOSTI POSOUZENÍ PRUTŮ NA VZPĚR.....	33
6.1	IMPERFEKCE.....	33
6.2	IZOLOVANÝ PRUT.....	38
6.3	GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ ANALÝZA NA IMPERFEKTNÍ KONSTRUKCI.....	38
6.4	POSOUZENÍ PRVKŮ S GLOBÁLNÍMI ÚČINKY.....	39
7	SROVNÁNÍ ZPŮSOBŮ POSOUZENÍ PRUTŮ NA VZPĚR	40
7.1	PRUŽNOSTNÍ A PLASTICITNÍ ANALÝZA	40
7.2	SROVNÁNÍ STABILITNÍCH A PEVNOSTNÍCH POSUDKŮ NA JEDNODUCHÉM PRUTU	41
7.2.1	EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA	47
7.2.2	KOMBINACE TLAKU A OHYBU	49
7.3	SROVNÁNÍ STABILITNÍCH A PEVNOSTNÍCH POSUDKŮ NA RÁMECH	51
8	ZÁVĚR.....	61
9	BIBLIOGRAFIE	63

1 ÚVOD

Práce je členěna na dvě části, teoretickou a praktickou. V teoretické části autor charakterizuje odlišností stabilitních úloh v ocelových konstrukcích. Je zde studován ideální prut, význam a výpočet Eulerova kritického zatížení na jednoduchém prutu iterační metodou. Následuje stručný úvod do vzpěrných délek, které jsou podrobně řešeny v praktické části. První část uzavírá tematika reálného prutu. Je zde sledováno chování prvku s počátečním zakřivením, které je řešeno rovněž iterativní metodou, jež vystihuje geometricky nelineární analýzu.

Druhou, praktickou, část otevírá problematika výpočtu stabilitních parametrů prutových soustav. Jedná se o vzpěrnou délku a kritické zatížení konstrukce. Bylo vybráno pět postupů, jak tyto hodnoty vyčíslit a u každého jsou zhodnoceny výhody, nevýhody a omezení. Z následného srovnání těchto metod na několika případech je vybrána vhodná metodika pro stanovení vzpěrné délky k následnému výpočtu odolnosti tlačného prvku. Praktická část zahrnuje také možnosti posouzení prutů na vzpěr podle platné ČSN EN 1993-1-1. Do této kapitoly spadá i tematika imperfektních konstrukcí pro určitý typ posouzení. Imperfekcím je tedy věnována samostatná kapitola, ve které je studováno odvození hodnot zakřivení do ČSN EN 1993-1-1 a reálný význam vztahů pro správnou aplikaci do řešených úloh.

Výsledky různých způsobů posouzení prutů na vzpěr jsou prvně srovnány na jednoduchém prutu s proměnnou štíhlostí. Pro vyhodnocení reálnosti některých průběhů je provedeno srovnání s výzkumnou činností. Po základní představě o poskytovaných hodnotách a charakteru průběhů jednotlivých posudků je totéž srovnání provedeno na příčných rámových vazbách s různým konstrukčním řešením. Výsledky jsou uceleny do závěrečného zhodnocení, které se zabývá vhodností jednotlivých způsobů posouzení pro projektanta ocelových konstrukcí.

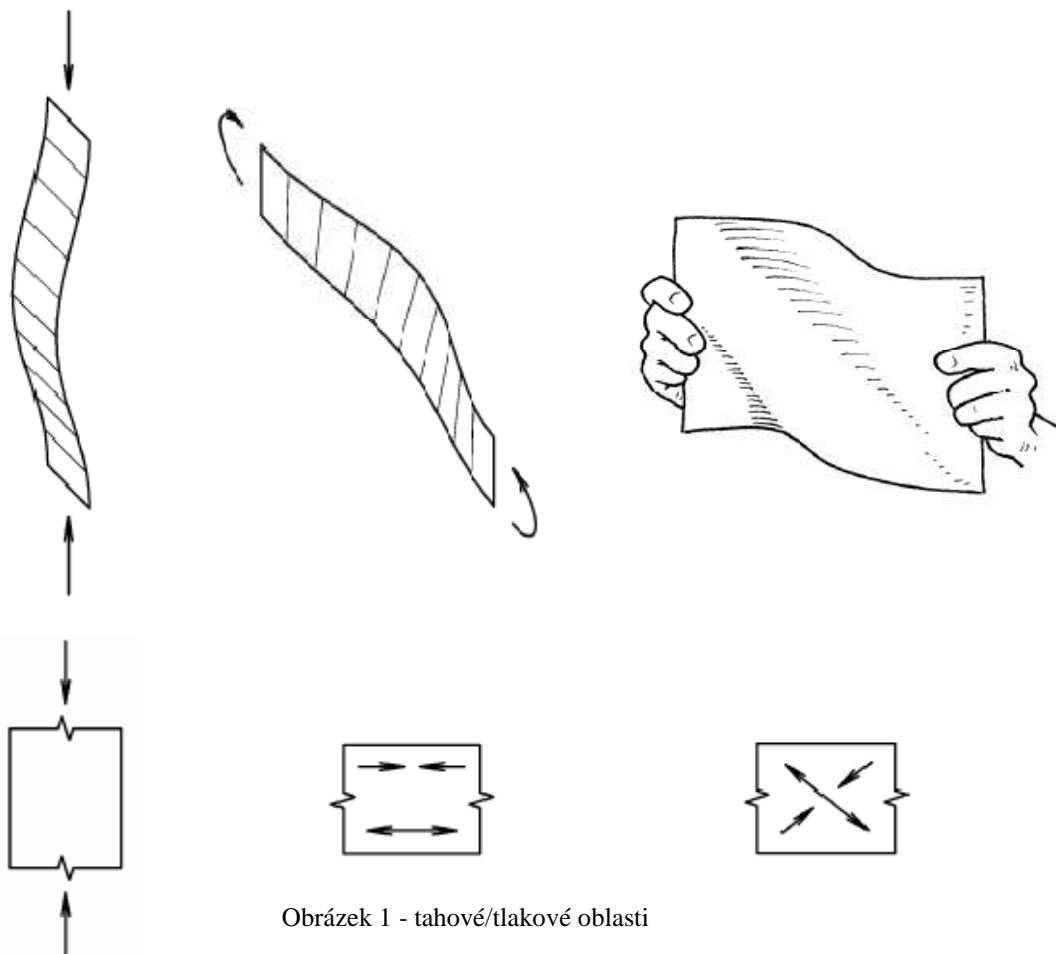
2 STABILITA OBECNĚ

Ocel disponuje ve srovnání s jinými stavebními materiály velkou pevností. Vlivem této několikanásobné pevnosti jsou prvky ocelových konstrukcí štíhlé. Není tedy rozhodující porušení materiálu, ale ztráta stability prvku vlivem tlakového namáhání (přímého/nepřímého, lokálního/globálního). Hovoříme potom o vzpěrné únosnosti, únosnosti v klopení. Orientační hodnoty odolností materiálů jsou uvedeny v tabulce 1.

<i>Materiál</i>	<i>Odolnost /MPa</i>
Ocel	235
Beton	25
Dřevo	9
Zdivo	2

Tabulka 1-odolnosti materiálů

Za přímé namáhání můžeme považovat osovou tlakovou sílu. Celý průřez je tlačén. Do nepřímých zařadíme namáhání ohybem a smykem. Při ohybu se tlak vytvoří v části profilu. V prvku (stojině) vystavenému smykovému namáhání se pak nachází tahové a tlakové pole. Takové prvky vykazují sníženou únosnost – je zohledněna možná ztráta stability tvaru. Způsoby ztráty stability jsou demonstrovány na obr. 1.



Obrázek 1 - tahové/tlakové oblasti

Lokální boulení se vztahuje k části prvku – stojina příruba. Dle náchylnosti k lokálnímu boulení rozdělujeme prvky do tříd průřezů I-IV. Tenkostěnné profily se posuzují samostatně na boulení stěn.

Globální ztrátou stability rozumíme vybočení prutů nebo celé konstrukce.

Problematika stability je tedy rozsáhlá a je třeba jí věnovat značnou pozornost, protože se jedná o jev okamžitý, nejsme včas varováni žádným signálem. V práci se věnuji pouze globálnímu ztrátě stability vlivem osově síly v prvcích.

Vzpěrný tlak má oproti tahu výrazná specifika.

Závisí na:

- délce prutu
- jeho spolupůsobení v konstrukci
- rozložení materiálu (tuhosti)
- modulu pružnosti v tlaku

Vliv pevnosti oceli je možné ověřit následujícím příkladem. Byla porovnána trojice prutů IPE 180, kloubově uložených, stejné délky, různých pevností. Výpočet únosnosti ve vzpěru byl proveden dle kapitoly 6.3 ČSN EN 1993-1-1. Oceli S235 a S355 přísluší vzpěrná křivka „a“, oceli S460 křivka „a₀“

	f /MPa	E /Mpa	A /mm ²	i /mm	L /mm	λ /-	λ ₁ /-	λ _p /-	χ /-	Nb,Rd /N	f /%	Nb,Rd /%
S	235	210 000	2390	74,2	8000	107,8	93,9	1,148	0,564	316 498	100	100
S	355	210 000	2390	74,2	8000	107,8	76,4	1,411	0,412	349 946	151	111
S	460	210 000	2390	74,2	8000	107,8	67,1	1,606	0,349	384 176	196	121

Tabulka 2 - srovnání návrhových odolností ve vzpěru při různé pevnosti oceli

¹ Poznámka k tabulce

f	pevnost	i	poloměr setrvačnosti
λ	štíhlost	λ ₁	srovnávací štíhlost
λ _p	poměrná štíhlost	χ	součinitel vzpěrnosti
N _{b,Rd}	vzpěrná únosnost		

Je zřejmé, že pro tlakové namáhání nemá význam užívat oceli vyšších a vysokých pevností. Jejich procentuální přínos na odolnosti je zanedbatelný. Stabilita tedy není problémem pevnosti, ale tuhosti.

¹ V práci užívám lomítka místo hranatých závorek. „f /MPa“ značí pevnost s jednotkou megapascal.
L/e značí poměr, před lomítkem není mezera.

3 IDEÁLNÍ PRUT

Studium stability se historicky odvíjelo od řešení ideálního prutu.

Ideální prut se vyznačuje charakteristickými vlastnostmi.

- Přímá těžištní osa
- Homogenní – modul pružnosti je ve všech místech průřezu stejný
- Dokonalé uložení – nepružné, bez tření.
- Izolovaný – nenachází se v konstrukci
- Zatížení působí centricky – paprsek zatížení je shodný s těžištní osou
- Nekonečná pružnost, pevnost

Lze konstatovat, že takový prut je nereálný. Žádná technologie nedokáže vyrobit prvek bez sebemenších odchylek v tvaru, tloušťce stěn. Říká se, že prvky mají geometrické imperfekce. Každý ocelový nosník má nerovnoměrně rozložené vlastnosti, zůstatkové pnutí od svařování, válcování (materiálové imperfekce). Dokonalý kloub, či vetknutí jsou jen teoretické okrajové podmínky pro řešení statických úloh. V konstrukci každé vetknutí je částečně pružné a každý kloub přenáší nějaký ohybový moment. Zatížení nelze umístit dokonale centricky (konstrukční imperfekce)

Řešení kloubově uloženého prutu, z hlediska rovinné ztráty stability, je známo již od roku 1744. Jeho autor je Paul Leonhard Euler – švýcarský matematik. Řešení je zde uvedeno jen okrajově. Je všeobecně známé a je možné ho nalézt v četné literatuře, např. /1/. Myšlenka vychází z diferenciální rovnice ohybové čáry se zohledněním teorie druhého řádu.

$$w'' + \frac{F}{EI} w = 0 \quad 3.1$$

w	funkce ohybové čáry
F	zatěžující síla
EI	ohybová tuhost prutu v příslušné rovině

Po zavedení okrajových podmínek je netriviálním řešením Eulerova kritická síla.

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2} \quad 3.2$$

N_{cr}	Eulerova kritická síla pro vybočení kolmo na hlavní osy setrvačnosti.
L_{cr}	vzpěrná délka prutu pro příslušnou rovinu vybočení.

Výpočet kritického břemene je možný také pomocí energetické metody. Podstata tohoto přístupu je v rovnováze mezi energií vnitřních a vnějších sil. Pro výpočet je nutno definovat deformační křivku. Uvažuje se rovnice průhybu odvozenou Eulerem.

$$w = w_m \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L}$$

Dále je uvažována maximální výchylka w_m jako jednotková. Pro další výpočet je vhodné odvodit derivace ohybové čáry a jejich druhé mocniny.

$$w' = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi \cdot x}{L} = \varphi \quad (w')^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi \cdot x}{L} = \frac{\pi^2}{2L^2} \left(1 + \cos \frac{2\pi \cdot x}{L} \right)$$

$$w'' = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi \cdot x}{L} \quad (w'')^2 = \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi \cdot x}{L} = \frac{\pi^4}{2L^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot x}{L} \right)$$

Dále platí $M_{(x)} = -EI \cdot w''_{(x)}$

Energie vnitřních sil je podle /12/ potom.

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{1}{2EI} \int_L (-EI \cdot w''_{(x)})^2 dx = \frac{(EI)^2}{2EI} \frac{\pi^4}{2L^4} \int_L \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot x}{L} \right) dx = \\ &= \frac{EI\pi^4}{4L^4} \left[x - \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi \cdot x}{L} \right]_0^L = \frac{EI\pi^4}{4L^4} [(L-0) - (0-0)] = \frac{EI\pi^4}{4L^3} J \end{aligned}$$

A potenciální energie vnějších sil

$$\begin{aligned} \pi_e &= \frac{1}{2} F \int_L (w'_{(x)})^2 dx = \frac{F}{2} \frac{\pi^2}{2L^2} \int_L \left(1 + \cos \frac{2\pi \cdot x}{L} \right) dx = \frac{F\pi^2}{4L^2} \left[x + \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi \cdot x}{L} \right]_0^L = \\ &= \frac{F\pi^2}{4L^2} [(L+0) - (0+0)] = \frac{F\pi^2}{4L} J \end{aligned}$$

Z rovnosti obou hodnot

$$\frac{EI\pi^4}{4L^3} = \frac{F\pi^2}{4L} \triangleright F_{cr} = \frac{EI\pi^4}{4L^3} \frac{4L}{\pi^2} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

Je nutno si uvědomit význam takové kritické síly. Je to hodnota, při které prut zatížený příčným impulzem zůstane vychýlen i při odstranění impulsu.. Pokud je prut zatížen silou menší než kritickou a příčně vychýlen, vrátí se do původní přímé polohy. Odpor je větší než účinek od zatížení.

Při síle větší než kritické, a příčném vychýlení, se soustava hroutí, prudce rostou deformace. Taková soustava je nestabilní

Při zatížení rovném kritické hodnotě a vychýlení je soustava v rovnováze při jakémkoliv výchylce. Pro vybočení je nutná akce příčného vychýlení. Dokonalý prut nemá důvod vybočit při jakémkoliv hodnotě zatížení bez příčné síly.

Působení je možné ověřit následujícím způsobem. Budeme hledat výchylku pomocí iterační metody, která přísluší rovnovážnému stavu. Ohybový moment uprostřed délky je možné vypočítat dvěma způsoby.

- z klasické mechaniky

$$M_1 = F \cdot w_m \quad 3.3$$

w_m maximální výchylka uprostřed rozpětí od příčné síly
 F zatěžující síla

- z diferenciální rovnice ohybové čáry.

$$M_2 = -EI \cdot w_m'' \quad 3.4$$

w_m'' hodnota druhá derivace ohybové čáry v polovině rozpětí

Oba výrazy obsahují stejnou proměnnou – deformaci – a oba výrazy se musí rovnat v rovnovážném stavu. Vzájemným dosazováním výsledků z jedné rovnice do druhé dosáhneme výchylky, která přísluší rovnovážnému stavu.

Funkce ohybové čáry z Eulerova řešení

$$w = w_m \sin \frac{\pi \cdot x}{L} \quad 3.5$$

L celková délka prutu

Její druhá derivace

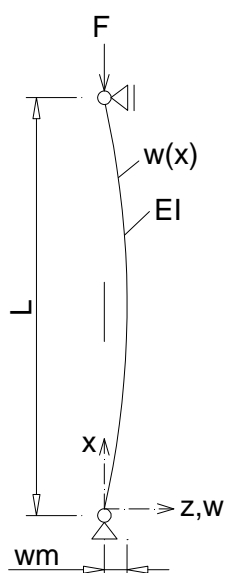
$$w'' = -\frac{\pi^2}{L^2} w_m \sin \frac{\pi \cdot x}{L} \quad 3.6$$

Hodnota v polovině rozpětí

$$w'' = -\frac{\pi^2}{L^2} w_m \quad 3.7$$

Po dosazení do 3.4 je ohybový moment

$$M_2 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} w_m \quad 3.8$$



Obrázek 2

Postup iterace:

- volba výchylky w_m^0 , výpočet M_1 dle rovnice 3.3.
- výpočet výchylky w_m^1 z rovnice 3.8. Za moment M_2 je dosazena hodnota M_1 , protože momenty musí být totožné.

$$w_m^1 = \frac{M_1 L^2}{\pi^2 EI} \quad 3.9$$

- dosazení w_m^1 do kroku „a“ a opakování postupu, dokud nedosáhneme přijatelné změny hodnoty výsledku.

Postup byl aplikován na prut IPE 100, délka 3m, namáhání na měkkou osu, kloubové uložení na obou stranách. Navržená počáteční výchylka způsobená bočním impulzem je 50mm.

Výsledky jsou zobrazeny v tabulce 2, 3, 4 a obrázku 3.

Pružná kritická síla

$$N_{er,z} = \pi^2 \frac{EI_z}{L_z^2} = \pi^2 \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 159 \cdot 10^3}{3000^2} = 36616N$$

L /mm	F /N	EI /Nmm2	Ncr /N	w _m /mm	M1 /Nmm
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	50,00	1 000 000
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	27,31	546 206
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	14,92	298 341
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	8,15	162 955
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	4,45	89 007
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	2,43	48 616
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	1,33	26 554
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,73	14 504
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,40	7 922
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,22	4 327
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,12	2 364
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,06	1 291
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,04	705
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,02	385
3 000	20 000	3,339E+10	36 616	0,01	210

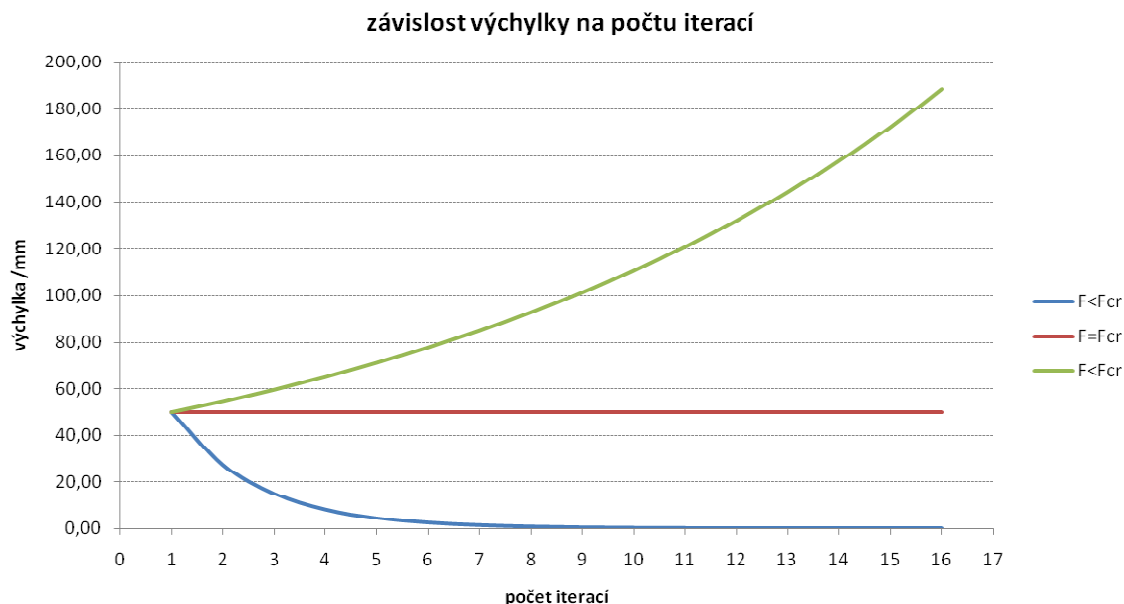
Tabulka 3 - iterace pro sílu menší než kritická

L /mm	F /N	EI /Nmm2	Ncr /N	w _m /mm	M1 /Nmm
3 000	36 616	3,339E+10	36 616	50,00	1 830 800
3 000	36 616	3,339E+10	36 616	50,00	1 830 788
3 000	36 616	3,339E+10	36 616	50,00	1 830 777
3 000	36 616	3,339E+10	36 616	50,00	1 830 765
3 000	36 616	3,339E+10	36 616	50,00	1 830 754

Tabulka 4 - iterace pro sílu rovnou kritické

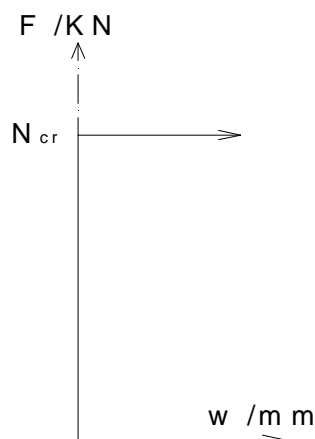
L /mm	F /N	EI /Nmm ²	N _{cr} /N	w _m /mm	M1 /Nmm
3 000	40 000	3,339E+10	36 616	50,00	2 000 000
3 000	40 000	3,339E+10	36 616	54,62	2 184 823
3 000	40 000	3,339E+10	36 616	59,67	2 386 727
3 000	40 000	3,339E+10	36 616	65,18	2 607 288
3 000	40 000	3,339E+10	36 616	71,21	2 848 232

Tabulka 5 - iterace pro sílu větší než kritická



Obrázek 3 - průběhy iterací

Z výsledků je patrné chování ideálního prutu při různém zatížení. Eulerova síla je jasné rozhraní v chování prutu. Při zatížení pod hodnotu kritického břemene je jediný rovnovážný stav – původní poloha, přímý prut. Při zvýšení zatížení na kritickou hodnotu je soustava v rovnováze při jakékoliv výchylce. Po dalším navýšení síly deformace rostou nade všechny meze, prut je nestabilní, konstrukce kolabuje. Ke ztrátě stability je však potřeba bočního impulsu.



V literatuře je někdy chování ideálního prutu popisováno z grafu na Obrázek 4 jako:

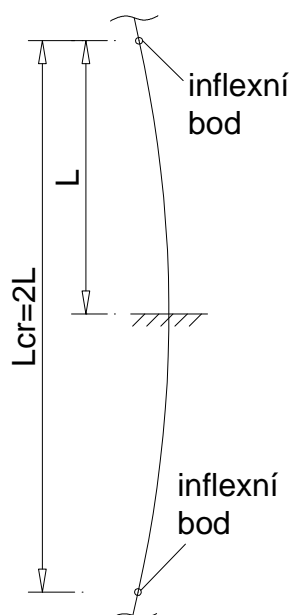
„Při zatížení menším než kritickém prut zůstává přímý a při dosažení kritické síly náhle vybočuje.“

Z Eulerova řešení a z uvedené iterační metody však vyplývá, že ideální prut bez vnuceného zakřivení nemá důvod ke ztrátě stability.

Graf udává výchylky, na kterých se soustava ustálí po vymizení bočního impulsu

Obrázek 4 - závislost konečného průhybu na síle

3.1 VZPĚRNÁ DÉLKA



Výraz 3.2 neobsahuje systémovou délku prutu, ale vzpěrnou délku, která se může od systémové diametrálně lišit. Důvodem je skutečnost, že stejný prut při rozdílném uložení je jinak náchylný ke ztrátě stability. Tato rozdílnost je vyjádřena vzpěrnou délkou

Vzpěrná délka je podle /1/ definována jako:

- Vzdálenost inflexních bodů
- Délka kloubově uloženého prutu, který vybočí při stejné kritické síle jako řešený prut.

Základní hodnoty pro izolované případy je možno nalézt také v /1/.

Obrázek 5 – vzpěrná délka

Prvky zajišťující vzpěrnou délku jsou namáhané snahou prutu vybočit, příčnou deformací, a na tuto sílu je třeba zajišťující prvky dimenzovat. Sílu je možné odvodit z počátečního zakřivení prutu. Zatížení na této excentricitě vyvolá ohybový moment. Za zatížení je uvažována únosnost prutu.

$$M = N_{b,rd} \cdot e$$

Vypočte se příčné zatížení působící uprostřed prutu tak, aby vyvolalo ekvivalentní ohybový moment.

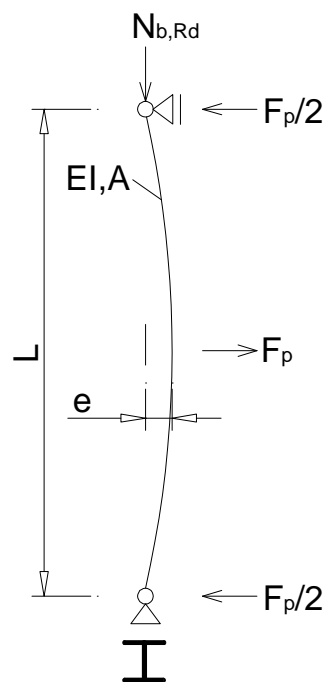
$$M = F_p \cdot L / 4 \Rightarrow F_p = 4 \cdot M / L$$

Této síle potom musí zajišťující prvek vzdorovat. Poměrem mezi touto silou a zatížením se získá vztah pro výpočet zatížení stabilizujících prvků.

Vstupní veličina, na které závisí příčná síla, je výchylka „e“.

Ta je rozdílná pro různé vzpěrné křivky, podle tab. 5.1 v ČSN EN 1993-1-1. Problematika imperfekcí je složitá, a proto jí je dále věnována samostatná kapitola.

Pro odvození je uvažována nejneprůzračnější možnost, křivka „c“ a různé profily, aby bylo možné posoudit, zda existuje universální hodnota, nebo je unikátní pro každý případ.



Obrázek 6 - výpočet příčné síly

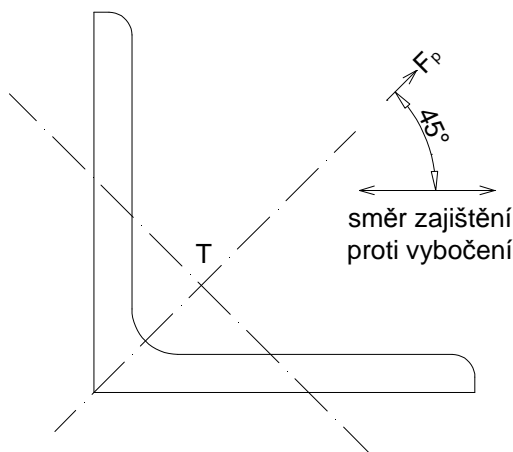
*	E /Mpa	A /mm ²	I _z /mm ⁴	i _z /mm	L/e	L /mm	λ /-	λ _p /-
HEA 100	210 000	2 120	1,340E+06	25,1	200	5 000	199,2	2,12
HEA 160	210 000	3 880	6,160E+06	39,8	200	5 000	125,6	1,34
HEA 200	210 000	5 380	1,340E+07	49,8	200	5 000	100,4	1,07

N _{cr} /N	χ /-	N _{b,rd} /N	e /mm	M /Nmm	F _p /N	F _p /N _{b,rd}
111 092	0,344	171 381	25	4 284 520,0	3 428	20/1000
510 693	0,589	537 050	25	13 426 255,0	10 741	20/1000
1 110 923	0,666	842 024	25	21 050 595,0	16 840	20/1000

L/e	poměr délky a vzepětí prutu	λ_p	poměrná štíhlost
λ	štíhlost	χ	součinitel vzpěrnosti
$N_{b,rd}$	únosnost prutu	e	vzepětí
M	ohybový moment v místě maximální výchylky		
F_p	příčná síla		

Dimenzační síla je tedy rovna 2/100 ze svislého zatížení, s uvažováním normových imperfekcí dle tab. 5.1 ČSN EN 1993-1-1. Podle [11] je běžně používanou hodnotou 1/100 ze svislého zatížení.

Prvek má obecně několik způsobů vybočení (rovinový/prostorový vzpěr) a pro každý je třeba určit vlastní vzpěrnou délku. Vzpěrná délka se při rovinném vzpěru vztahuje k hlavním osám setrvačnosti. Např. pro rovnoramenný úhelník je nejměkčí osa odkloněna o 45° od roviny zajištění proti vybočení a je na zvážení projektanta, zda je toto zajištění účinné.



Obrázek 7 – zajištění úhelníku proti vybočení

Vzpěrným délkám je třeba věnovat velkou pozornost, protože z nich vychází únosnost prvku. Stanovením vzpěrných délek spolu s dalšími parametry vzpěru se práce podrobně věnuje v kapitole 5.

4 REÁLNÝ PRUT

Jak bylo řečeno ve druhé kapitole, ideální pruty se v konstrukcích nevyskytují. Proto je dále rozebrána problematika prutu s geometrickou imperfekcí - počátečním zakřivením. Opět je možno iteračně hledat rovnovážnou výchylku.

Ohybový moment:

- z klasické mechaniky

$$M_1 = F \cdot w_f = F \cdot \delta_o + F \cdot a \quad 4.1$$

w_f celková výchylka
 δ_o počáteční zakřivení
 a přírůstek výchylky od osového zatížení

- z diferenciální rovnice ohybové čáry

rovnice ohybové čáry a její druhá derivace

$$w = a \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L} \Rightarrow w'' = -a \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi \cdot x}{L}$$

Hodnota v polovině délky.

$$w''_{x=L/2} = -a \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi \cdot L/2}{L} = -a \frac{\pi^2}{L^2}$$

Dosazením do 3.4 je ohybový moment

$$M_2 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} a \quad 4.2$$

Ve vzorci 4.1 je výsledná výchylka, protože síla působí na celkové excentricitě. V rovnici 4.2 je pouze přírůstek, protože prut bude namáhán až při zdeformování. Zakřivení je původní tvar, prut není ve stavu napjatosti. Vyjádření výchylky z rovnice 3.2

$$a^1 = \frac{M_1 L^2}{\pi^2 EI} \quad 4.3$$

Postup iterace:

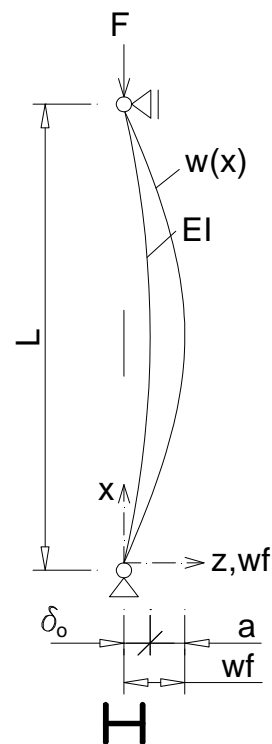
- a) výpočet M_1 z rovnice 4.1, $a^0=0$
- b) dopočet a^1 z rovnice 4.3
- c) opakování bodu „a“, kde $a=a^1$

Studovaný prut je IPE 100, 5m, kloubově uložený, řešený pro tuhou osu, navržené zakřivení je 12mm.

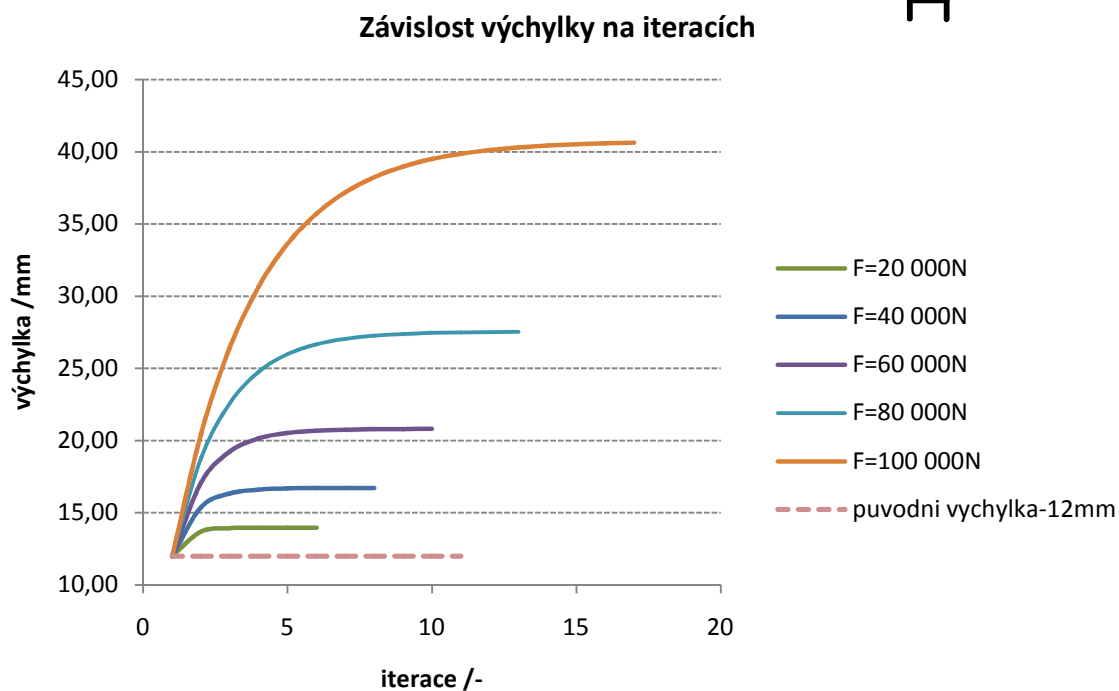
Pružná kritická síla

$$N_{er,y} = \pi^2 \frac{EI_y}{L_y^2} = \pi^2 \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 1,71 \cdot 10^6}{5000^2} = 141800N$$

Číselný postup je uveden pouze na jednom kroku v Tabulka 6. Průběhy dalších kroků, se zvětšující se silou, jsou na Obrázek 9.



Obrázek 8



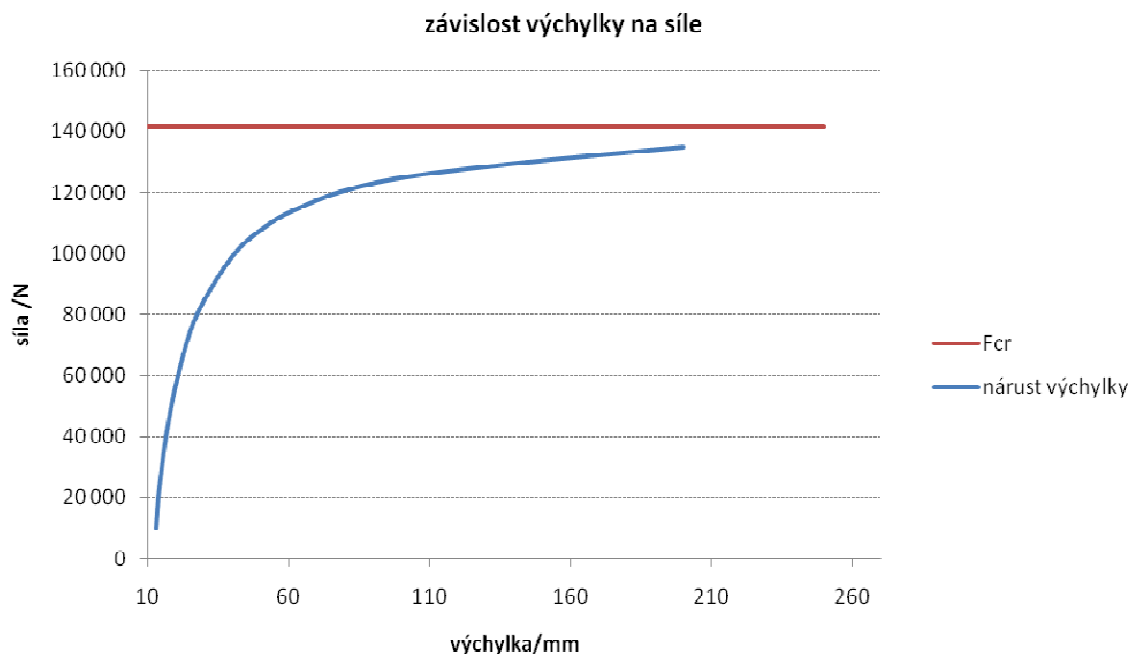
Obrázek 9 – průběhy iterací

L/mm	EI/Nmm ²	F/N	δ _o /mm	a/mm	M ₁ /Nmm	wf/mm	Δw/%
5 000	3,59E+11	20 000	12,00	0,00	240 000	12,00	
5 000	3,59E+11	20 000	12,00	1,69	273 858	13,69	
5 000	3,59E+11	20 000	12,00	1,93	278 635	13,93	
5 000	3,59E+11	20 000	12,00	1,97	279 309	13,97	
5 000	3,59E+11	20 000	12,00	1,97	279 404	13,97	16

Tabulka 6 - postup iterace

Z grafu je možné vyčíst, že prvek nabude rovnovážného stavu na zvětšené výchylce. Podle Tabulka 6 se při síle 20kN (14%N_{cr}) průhyb zvětšil o 16%. Při zachování stejného kroku, 20kN, je možné pozorovat výrazný nárůst průhybu. Při síle 100kN (70%N_{cr}) se výchylka zvětší o 239%.

Vynesení závislosti mezi silou a ustálenou deformací je na Obrázek 10.



Obrázek 10 - rovnovážné výchylky v závislosti na síle

Průběh má značně nelineární charakter a pro kritickou sílu se přibližuje nekonečnu. Výchylka je teoreticky omezena závislostí na délce prutu, ale může nabývat značných rozměrů z toho důvodu, že prut má stále nekonečnou pružnost. Shodný charakter průběhu uvádí autor v /1/.

Metodika výpočtu hledání rovnovážného stavu na ustálených deformacích je nazývána „výpočet podle teorie druhého řádu“ nebo také „geometrická nelinearita“ (dále jako GNA – geometricky nelineární analýza).

Výsledky iterační metody je možné srovnat s postupem, který využívá koeficientu druhého řádu jako ekvivalent GNA. Odvození součinitele druhého řádu lze nalézt v /1/.

$$k_{II} = \frac{1}{1 - \frac{F}{N_{cr}}} \quad 4.4$$

Konečná deformace

$$w_f = e_o \cdot k_{II} \quad 4.5$$

Porovnání výsledků deformací z iteračního procesu a hodnot získaných pomocí součinitele druhého řádu v Tabulka 7.

F /KN	w_f iterace /mm	w_f součinitel II. řádu /mm
10	12,9	12,9
20	14,0	14,0
40	16,7	16,7
60	20,8	20,8
80	27,5	27,5
100	40,7	40,7

Tabulka 7 - srovnání výsledků konečných výchylek

Výsledky se naprosto shodují. Součinitel je s výhodou využit při řešení jednoduchých prutů v kapitole 7.2.

5 STABILITA PRUTOVÝCH SOUSTAV

Pokud je prvek připojen do konstrukčního systému, vzpěrná délka nezávisí pouze na jeho uložení, ale také na posuvnosti styčníků. Hodnoty součinitelů vzpěrnosti β pro izolované soustavy zde není možné použít právě z důvodu posuvnosti soustavy.

Platí:

Posuvné styčníky $\beta > 1$

Neposuvné styčníky $\beta < 1$

Pro stanovení vzpěrné délky je u soustav je nutné zohlednit:

- Tuhosti prvků
- Posuvnost styčníků
- Celkové zatížení soustavy
- Okrajové podmínky

Pro posouzení prvku dle 6.3 /3/ je nutné znát vzpěrnou délku, kterou lze získat přímým výpočtem nebo dopočítat z kritického zatížení konstrukce.

Hodnoty součinitelů vzpěrných délek β mohou nabývat rozsahu 1,0 – 4,0 a jejich stanovení není tak jednoznačné jako u izolovaných prutů, protože se musí zohlednit výše uvedené.

Pro výpočet vzpěrné délky bylo vybráno několik způsobů:

- a. navržená vzpěrná délka (dle implementované metody softwaru)
- b. součinitel kritického zatížení (ze stabilitního výpočtu)
- c. výpočet kritického zatížení (ze stabilitního determinantu matice tuhosti k-ce)
- d. výpočet součinitele vzpěrné délky (z tuhosti jednotlivých prvků)
- e. součinitel vzpěrné délky dle statických tabulek
- f. Hodnoty podle /11/

Vhodným konstrukčním řešením lze někdy posuvnost styčníků vyloučit a sloupy pak výhodně uvažovat jako izolované pruty.

5.1 NAVRŽENÁ VZPĚRNÁ DÉLKA - software

Program Scia Engineer obsahuje implementovanou metodu pro stanovení vzpěrné délky. Program ji určí na základě deformací a momentů na soustavě ze dvou zatěžovacích stavů, které jsou generovány automaticky. Zatěžovací stavy převzaty z /2/.

Zatěžovací stav 1:

Příčle jsou zatíženy v LSS rovnoměrným spojitým zatížením

$$g_y = 1 \text{ N/m}$$

$$g_z = -100 \text{ N/m}$$

Sloupy jsou zatíženy v GSS rovnoměrným spojitým zatížením

$$Q_x = 1000 \text{ N/m}$$

$$Q_y = 1000 \text{ N/m}$$

Zatěžovací stav 2:

Příčle jsou zatíženy v LSS rovnoměrným spojitým zatížením

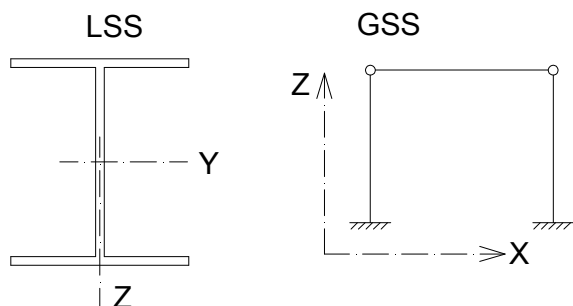
$$g_y = -1 \text{ N/m}$$

$$g_z = -100 \text{ N/m}$$

Sloupy jsou zatíženy v GSS rovnoměrným spojitým zatížením

$$Q_x = -1000 \text{ N/m}$$

$$Q_y = -1000 \text{ N/m}$$



Obrázek 11 - souřadný systém ve Scia Engineer

Metoda vyšetřuje posuvnost uzlů, ale je možné přímo definovat posuvnost uzlů. Vzpěrná délka je potom navržena s ohledem na tuto posuvnost či neposuvnost. Metoda nedokáže zohlednit vliv zatížení soustavy na řešený prvek (viz řešený případ 6).

Nastavení posuvnosti styčníků se provádí v:

- vlastnosti prutu => vzpěrné a relativní délky => opravit => data o vzpěru => u příslušných uzlů nastavit požadovanou posuvnost

5.2 SOUČINITEL KRITICKÉHO ZATÍŽENÍ - software

Další možností programu Scia Engineer je získání kritického součinitele zatížení soustavy α_{cr} . Kritická síla je potom

$$N_{cr} = \alpha_{cr} \cdot F \quad 5.1$$

F zatížení na konstrukci
 α_{cr} součinitel kritického zatížení

Výpočet je proveden z podmínky nulového determinantu celkové matice tuhosti konstrukce, /2/. Násobitel geometrické matice tuhosti je součinitel kritického zatížení.

$$[\overline{K_e} - \alpha_{cr} \overline{K_g}] \cdot u = 0 \quad 5.2$$

$\overline{K_e}$ pružná matice tuhosti
 $\overline{K_g}$ geometrická matice tuhosti (matice počáteční napjatosti)
 u vektor uzlových přemístění

Podmínka je splněna při nulových deformacích, nebo pokud je výraz v hranatých závorkách roven nule.

$$\overline{K_e} - \alpha_{cr} \overline{K_g} = 0 \quad 5.3$$

Řešení spočívá ve stanovení vlastních čísel, násobitelů, geometrické matice tuhosti. Vlastní čísla jsou hledány součiniteli kritického zatížení.

Při řešení je nutno nastavit následující specifika pro získání tohoto součinitele.

- Aktivovat stabilitní výpočet
 - o Projekt => funkcionalita: zaškrtnout stabilita
- Vytvořit stabilitní kombinaci
- Vytvořit síť prvků na prutech
 - o Menu => nastavení => síť prvků: nastavit počet dílků na prutu²
 - o Strom => výpočet, síť => generace sítě (pohodlněji pod lištou menu použitím stejné ikony jako ve stromu)
- Prohlížení výsledků
 - o Strom => výsledky => součinitel kritického zatížení
 - o Strom => výsledky => přemístění uzlů
 - Typ zatížení: stabilitní kombinace
 - Stabilitní kombinace: vybrat příslušnou kombinaci
 - Hodnoty: u_x/u_z . Při vybrání některé z hodnot v nabídce přibude i možnost deformovaná síť. Ta se nezobrazuje, pokud je vybráno „více složek“.

Na deformované síti je možné pozorovat, jaký způsob ztráty stability rozhoduje. Výhodou této metody je zohlednění celkového zatížení konstrukce, tuhosti všech prvků.

5.3 VÝPOČET KRITICKÉHO ZATÍŽENÍ

Předchozí postup má alternativu, kterou je možné řešit i manuálně (s využitím tabulkového procesoru). Postup je podrobně popsán v /5/. Uvedeny zde jen důležité kroky.

Metoda spočívá v nalezení nulového determinantu matice tuhosti konstrukce, jehož členy, jsou vyjádřeny v závislosti na osovém zatížení. Je tedy nutné i nezatížené pruty zatížit malou silou, aby bylo dosaženo nějaké tuhosti prvku. Sestava zatížení, při které je splněna podmínka nulového determinantu je potom zatížení kritické.

Výchozí výraz

$$F = \varepsilon^2 \frac{EI}{L^2} \quad 5.4$$

L	systémová délka
ε	parametr vzpěrné délky
F	osové zatížení prutu

$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad 5.5$$

Pootočení v koncových uzlech³

² Ve všech řešených případech používám dělení prvku na dvacet dílků

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) \quad 5.6 \quad \beta = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} - 1 \right) \quad 5.7$$

Členy matice tuhosti v lokálních souřadnicích pro oboustranně vetknutý prut.

$$k_1 = \frac{EI}{L^3} \left(\frac{2}{\alpha - \beta} - \varepsilon^2 \right) \quad k_2 = \frac{EI}{L^2} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right) \quad k_3 = \frac{EI}{L} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \right)$$

$$k_4 = \frac{EI}{L} \left(\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \quad k_n = \frac{EA}{L}$$

E modul pružnosti v tlaku
 A plocha průřezu
 L délka prutu
 I tuhost v příslušném směru

Členy matice tuhosti prutu v globálních souřadnicích

$$\begin{aligned} k_A &= k_n \cos^2 \delta + k_1 \sin^2 \delta & k_B &= (k_n - k_1) \sin \delta \cdot \cos \delta \\ k_C &= -k_2 \sin \delta & k_D &= k_n \sin^2 \delta + k_1 \cos^2 \delta \\ k_E &= k_2 \cos \delta \end{aligned}$$

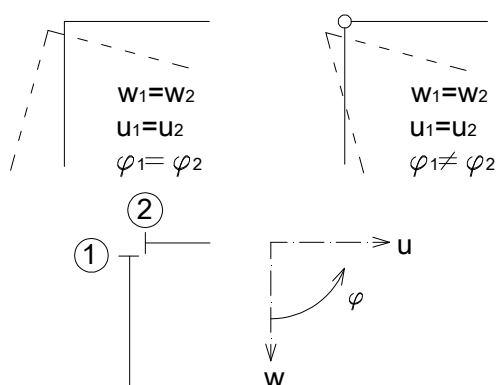
δ úhel pootočení mezi lokálním a globálním souřadným systémem

Matice tuhosti prutu v globálních souřadnicích

$$[K] = \begin{bmatrix} k_A & k_B & k_C & -k_A & -k_B & k_C \\ k_B & k_D & k_E & -k_B & -k_D & k_E \\ k_C & k_E & k_3 & -k_C & -k_E & k_4 \\ -k_A & -k_B & -k_C & k_A & k_B & -k_C \\ -k_B & -k_D & -k_E & k_B & k_D & -k_E \\ k_C & k_E & k_4 & -k_C & -k_E & k_3 \end{bmatrix} \quad 5.8$$

Z těchto matic je sestavena matice tuhosti konstrukce. Ta je po vyskládání singulární, nemá okrajové podmínky. Ty se určí vynulováním řádků a sloupců vztahujícím se k vazbě příslušné vazbě. Na hlavní diagonálu se dosadí jedničky.

³ Goniometrické funkce musí pracovat s radiány.



Obrázek 12 - deformace ve styčnicích

Při sestavování matice je nutno respektovat způsob spojení ve styčnicích. Výše uvedené členy matice jsou odvozeny pro oboustranně vetknutý prut. Pokud jsou pruty spojeny tuze, potom jsou tuhosti ve styčnicích sčítány, matice prutů se v matici konstrukce překryjí.

Kloubové spojení je modelováno takovým způsobem, že se sčítají pouze tuhosti prutů v posunech. Definujeme tak nezávislost pootočení. Sestavení matice se tím velmi komplikuje

Po vytvoření matice konstrukce se hledá řešení rovnice

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} = 0 \quad 5.9$$

K globální matice konstrukce u vektor uzlových přemístění
 F zatěžovací vektor

V tomto případě je zatížení zahrnuto v matici tuhosti a vektor F je tedy nulový. Řešení je možné s nulovým vektorem uzlových přemístění nebo s hodnotou determinantu matice konstrukce rovnou nule. Druhý případ charakterizuje vybočení konstrukce. Takovému stavu náleží kritická hodnota ε_{cr} . Ze známého řešení parametru vzpěrné délky se vypočte vzpěrná délku prutu.

$$L_{cr,i} = \frac{\pi}{\varepsilon_{cr,i}} L_i \quad 5.10$$

Metoda byla testována na jednoduchém prut IPE 270, 8m, svisle uložený, kloubově, řešený pro vybočení kolmo na tuhou osu

Pružná kritická síla

$$N_{er,y} = \pi^2 \frac{EI_y}{L_y^2} = \pi^2 \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 5,79 \cdot 10^7}{8000^2} = 1875,07 N$$

Výpočet metodou stabilitního determinantu

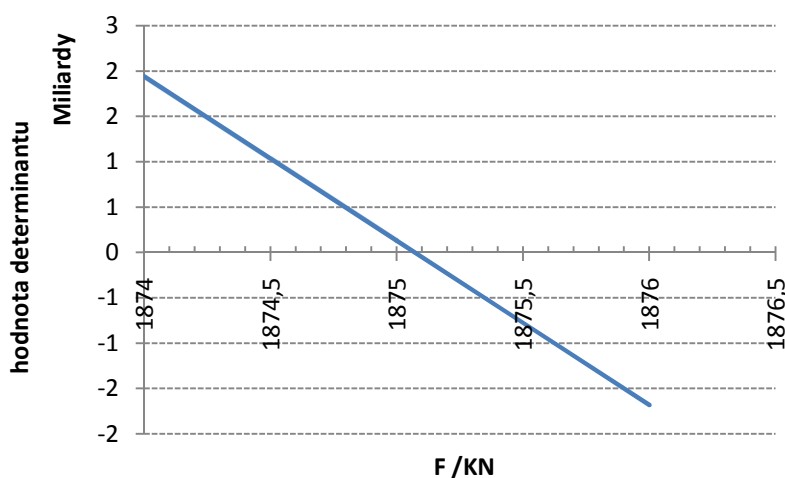
L /m	I /m4	A /m2	E /Kpa	F /KN	delta /rad
8	5,790E-05	4,590E-03	2,100E+08	1 875,07	1,571

epsilon	alfa	beta	Kn	C1	K1	C2	K2	C3	K3	c4	k4
3,142	609 278	609 277	120 488	0,000	0	4,935	938	2,467	3 750	2,467	3 750

Matice tuhosti v globálních souřadnicích včetně okrajových podmínek

1	0	0	0	0	0	U1
0	1	0	0	0	0	V1
0	0	3 750	0	0	3 750	Φ1
0	0	0	1	0	0	U2
0	0	0	0	120 488	0	V2
0	0	3 750	0	0	3 750	Φ2
U1	V1	Φ1	U2	V2	Φ2	
		DET:	1,13E+06			

Průběh hodnot determinantu



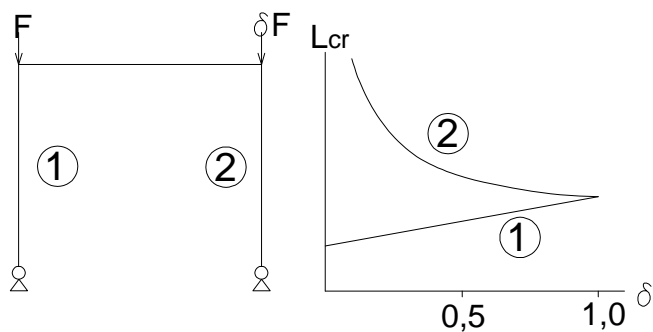
Obrázek 13 - hodnoty determinantu

Kritické zatížení prutu získané touto metodou je naprosto shodné s výpočtem podle Eulerova vztahu.

Pro srovnání alternativy výpočetního postupu užívaného v softwarech lze pro stejný prut zjistit řešení pomocí softwaru. Řešení v programu Scia Engineer poskytuje výsledek 1846,14 KN při dělení prvku na 200 dílků, 1846,17 KN při dělení na 20 dílků. Postup výpočtu pomocí vlastních čísel matic se mírně liší od přesného řešení, pro inženýrskou praxi je však rozdíl zanedbatelný.

Při hledání řešení je nutno postupovat dle systematického postupu, protože při sebemenší odchylce zatížení od naprosto přesného řešení je hodnota determinantu v řádech 10^{10} a výše.

Metodou lze řešit i obecnější soustavy, pruty různých tuhostí a nesymetrického zatížení. Sestavení matice tuhosti je však pracné. Vzorec 5.10 je matematicky v pořádku, ale v některých případech postrádá reálný význam. Příkladem je nesymetricky zatížený rám, u kterého by se vyšetřovala vzpěrná délka méně zatíženého sloupu. Příklad je převzat z /5/ Závislost vzpěrné délky sloupu č. 2 má nelineární charakter, protože parametr vzpěrné délky ϵ nabývá při kritickém zatížení na méně zatížených prvcích malých hodnot (viz rovnice 5.5). Ze vztahu 5.10 potom plyne uvedená křivka.



Obrázek 14 - vzpěrné délky na nesymetricky zatíženém rámu

Tento fakt je nutné zohlednit i v případě výpočtu vzpěrné délky ze součinitele kritického zatížení získaného pomocí softwaru (kapitola 5.2.) Zpětný výpočet vzpěrné délky z kritického zatížení je možný jen pro nejvíce zatížené prvky. Prvky vzdorující malému zatížení mají malou kritickou sílu, protože součinitel kritického zatížení je stejný pro celou konstrukci. Nízké kritické síle potom přísluší velká vzpěrná délka.

5.4 VÝPOČET SOUČiniteLE VZPĚRNÉ DÉLKY

Postup je uveden v /6/. Řešení vychází z tuhosti jednotlivých prvků. Z grafů, které jsou závislé na posuvnosti styčníků, se odečte součinitel vzpěrné délky.

Výchozí předpoklad pro stanovení těchto hodnot je plné zatížení, symetrické uložení.

5.5 SROVNÁNÍ VÝSLEDŮ NA VYBRANÝCH PŘÍPÁDECH

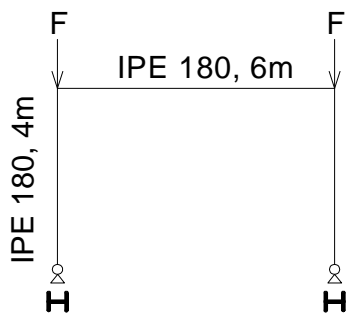
V této kapitole jsou porovnány parametry vztahující se ke stabilitě na případech uvedených v kapitole 10.3.2 v /4/ a některých dalších. Pro výpočet byl použit software Scia Engineer 2012, verze 12.0.183, studentská verze. Postupy výpočtů ze stabilitách determinantů z důvodu jejich rozsáhlosti nejsou uvedeny.

B operátor pro další výpočty $B = \pi^2 EI_y$

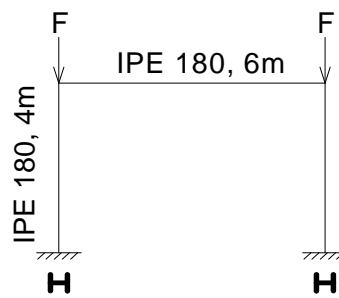
Převod mezi požadovanými výstupy je prováděn pomocí vztahu:

$$N_{cr} = \frac{B}{L_{cr}^2}; L_{cr} = \beta \cdot L$$

Hodnoty uvedené v tabulce tučně jsou přímé výstupy jednotlivých přístupů. Tence pak hodnoty dopočtené.



Obrázek 15 -- rám 1



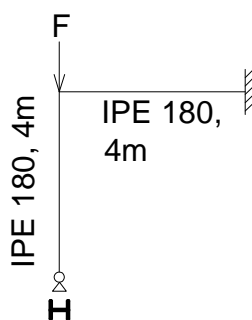
Obrázek 16 - rám 2

*	β /-	Eulerova kritická síla /KN
Navržená vzpěrná délka	2,547	262,9
kritické zatížení - software	2,496	273,7
kritické zatížení – stabilitní determinant	2,486	276,0
Součinitel vzpěrné délky odečten z grafu	2,680	237,5
Hodnota ze statických tabulek	2,530	266,5

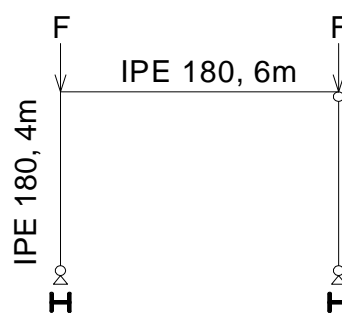
Tabulka 8 - srovnání výsledků na rámu 1

*	β /-	Eulerova kritická síla /KN
Navržená vzpěrná délka	1,244	1102,4
kritické zatížení - software	1,235	1117,2
kritické zatížení – stabilitní determinant	1,222	1141,0
Součinitel vzpěrné délky odečten z grafu	1,30	1009,5
Hodnota ze statických tabulek	1,219	1148,1

Tabulka 9 - srovnání výsledků na rámu 2



Obrázek 17 - rám 3



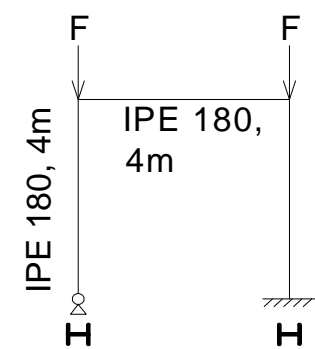
Obrázek 18- rám 4

*	β /-	Eulerova kritická síla /KN
Navržená vzpěrná délka	0,826	2500,5
kritické zatížení - software	0,838	2428,1
kritické zatížení – stabilitní determinant	0,821	2530,0
Součinitel vzpěrné délky odečten z grafu	0,815	2568,4
Hodnota ze statických tabulek	0,818	2488,4

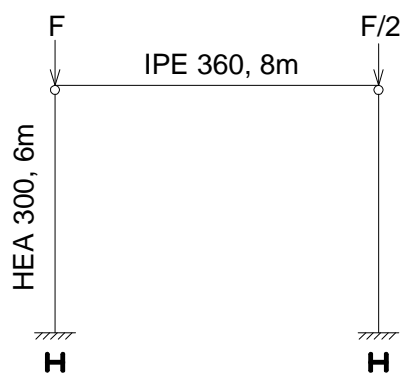
Tabulka 10 - srovnání výsledků na rámu 3

*	β /-	Eulerova kritická síla /KN
Navržená vzpěrná délka	2,99	189,6
kritické zatížení - software	4,099	101,5
kritické zatížení – stabilitní determinant	4,089	102,0
Hodnota ze statických tabulek	3,579	133,2

Tabulka 11 - srovnání výsledků na rámu 4 pro levý sloup



Obrázek 20 - rám 5



Obrázek 19 - rám 6

*	β /-	Eulerova kritická síla /KN
Navržená vzpěrná délka	2,137	374,4
kritické zatížení - software	1,501	748,3
kritické zatížení – stabilitní determinant	1,495	763,0
Hodnota ze statických tabulek	1,495	763,3

Tabulka 12- srovnání výsledů na rámu 5 pro levý sloup

*	β /-	Eulerova kritická síla /KN
Navržená vzpěrná délka	2,002	2634,0
kritické zatížení - software	1,748	3450,1
kritické zatížení – stabilitní determinant	1,734	3505,0
Součinitel vzpěrné délky odečten z grafu	2,000	2634,0

Tabulka 13 - srovnání výsledků na rámu 6

Na prvních dvou rámech všechny hodnoty dávají téměř shodné výsledky, pouze odečet součinitele vzpěrné délky z grafu je o něco přísnější. Na třetím rámu je shoda téměř dokonalá. Čtvrtý rám poskytuje tři různé hodnoty, kde řešení získané pomocí stabilitního determinantu je považováno za správné z důvodu shody s druhou metodou, a protože se metoda osvědčila na jednoduchém prutu jako přesná.

Poslední případ je důkazem toho, že na zatížení soustavy hraje svou úlohu ve stanovení stabilitách parametrů, které některé metody nejsou s to zohlednit.

Z uvedených srovnání je možné vyvodit tyto závěry.

- Stabilitní výpočet v použitém softwaru poskytl vždy správné řešení. Jako nástroj pro stanovení stabilitách parametrů se ukázal z prezentovaných metod jako nejvhodnější z důvodů rychlosti, přesnosti, pohodlnosti a schopnosti řešit obecné soustavy s obecným zatížením a proměnnými průřezy. Je však nutno správně nastavit funkce programu (kapitola 5.2) a správného užití výsledků (Obrázek 14).
- Užití „ručního“ výpočtu kritického zatížení se ukázalo jako složité, zejména v modelování kloubových styčníků, a vhodné jen pro zvláštní, studijní účely.

6 MOŽNOSTI POSOUZENÍ PRUTŮ NA VZPĚR

Posudek stability konstrukcí lze dle 5.3 v /3/ provést třemi způsoby:

- a) Posouzením jednotlivých prvků (5.2)
- b) globální analýzou (5.3)
- c) částečně globální analýzou a částečně posouzením jednotlivých prutů (5.4)

Pro globální analýzu je nutné definovat zakřivení konstrukce.

6.1 IMPERFEKCE

Imperfekce se skládají z

- Globální imperfekce: náklonu
- Imperfekce prutů: zakřivení prutu

Podle kapitoly 5.3.2 b) /3/ se má zakřivení uvažovat podle Tabulka 14.

Křivka vzpěrné pevnosti	Pružnostní analýza	Plasticitní analýza
	e/L	
a ₀	1/350	1/300
a	1/300	1/250
b	1/250	1/200
c	1/200	1/150
d	1/150	1/100

Tabulka 14 - normové imperfekce

Postup odvození tabulkových hodnot je možné nalézt v /8/. Vychází z ekvivalentní geometrické imperfekce a poměrné štíhlosti. Ekvivalentní geometrická imperfekce byla stanovena jako

$$e_o = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{W}{A} \quad 6.1$$

$\bar{\lambda}$ poměrná štíhlost
A plocha průřezu

W průřezový modul
 α součinitel imperfekce

Výraz se upraví

$$e_o = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{\frac{I}{h/2}}{A} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{\frac{A \cdot i^2}{h/2}}{A} = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{2 \cdot i^2}{h}$$

I	moment setrvačnosti	h	šířka/výška profilu
i	poloměr setrvačnosti		

Délka prutu z poměrné štíhlosti

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{1}{93,9 \cdot \varepsilon} \Rightarrow L = \bar{\lambda} \cdot i \cdot 93,9 \cdot \varepsilon$$

λ	štíhlost	λ_1	srovnávací štíhlost
$L_{cr}=L$	pro kloubově uložený prut	$\varepsilon=1,00$	pro ocel S 235

Vyjádřením poměru vzepětí k délce prutu a vyřešením limity získaného poměru pro štíhlost jdoucí k nekonečnu je obdržen universální výraz pro všechny štíhlosti.

$$\frac{e_0}{L} = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{2 \cdot i^2}{h}}{\bar{\lambda} \cdot i \cdot 93,9 \cdot \varepsilon} = \frac{\alpha \cdot \left(1 - \frac{0,2}{\bar{\lambda}}\right) \frac{2 \cdot i}{h}}{93,9 \cdot \varepsilon} \Rightarrow \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow \infty} \alpha \cdot \left(1 - \frac{0,2}{\bar{\lambda}}\right) \frac{2 \cdot i}{h} \frac{1}{93,9 \cdot \varepsilon}$$

Předpoklady pro další úpravu:

Pro tuhou osu $i \approx h/2 \Rightarrow \frac{2 \cdot i}{h} = 1$

Pro měkkou osu⁴ $i \approx 0,289 \cdot h \Rightarrow \frac{2 \cdot i}{h} = 0,58$

$$\left(1 - \frac{0,2}{\bar{\lambda}}\right) \Rightarrow 1 \quad \bar{\lambda} \Rightarrow \infty$$

pro

Po aplikaci předpokladů je imperfekce závislá pouze na součiniteli imperfekce

pro tuhou osu $\frac{e_0}{L} = \frac{\alpha}{93,9 \cdot \varepsilon}$ 6.2

pro měkkou osu $\frac{e_0}{L} = \frac{\alpha}{160 \cdot \varepsilon}$ 6.3

Např. imperfekce pro IPE 270, S235:

tuhá osa $\frac{e_0}{L} = \frac{0,21}{93,9 \cdot 1,00} = \frac{1}{447}$	měkká osa $\frac{e_0}{L} = \frac{0,34}{160 \cdot 1,00} = \frac{1}{470}$
---	---

Rozdíly ve výsledcích jsou malé, a proto se hodnoty v Tabulka 14 užijí pro tuhou i měkkou osu. Výsledky pro vzpěrné křivky dle uvedeného postupu a hodnoty v normě jsou shrnuty v Tabulka 15 (převzata z /8/). Hodnoty ze vzorců 6.2 a 6.3 vyjadřují pouze zakřivení prutu.

Pro stanovení výsledné imperfekce, se kterou je proveden posudek, je zohledněn i vliv počáteční napjatosti. Tento jev je vyjádřený zakřivením a uvažuje se přibližně jako $e_r=L/750$. Sečtením této hodnoty s imperfekcemi, které vyjadřující pouze geometrickou

⁴ V tomto případě „h“ je šířka profilu

výchylky se získají tabulkové hodnoty. Postup v tomto odstavci není přímo uveden v /8/, lze jej pouze odvodit z důležitých informací v /8/ a zkusmým výpočtem.

Vzpěrná křivka	L/e		
	pro $\bar{\lambda} \Rightarrow \infty$	pro $\bar{\lambda} \Rightarrow 3$	ČSN EN 1993-1-1 Tab. 5.1-elastický
a ₀	722	773	350
a	447	470	300
b	276	296	250
c	192	205	200
d	132	124	150

Tabulka 15 - srovnání imperfekcí v závislosti na štíhlosti

Je možné vystihnout míru zjednodušení vztahu mezi poloměrem setrvačnosti a rozměrem profilu, které vstupuje do odvození

profil	Poloměr setrvačnosti /mm			
	Tuhá osa		Měkká osa	
	Zjednodušeně	přesně	zjednodušeně	přesně
IPE 100	50	40,7	15,9	12,4
IPE 300	150	125	43,4	33,5
HEA 100	58	40,6	28,9	25,1
HEA 300	145	127	86,7	74,9

Tabulka 16 - srovnání hodnoty poloměru setrvačnosti z přesné a zjednodušené metody

Uvedené zobecnění vztahu vykazuje chybu 10-20%.

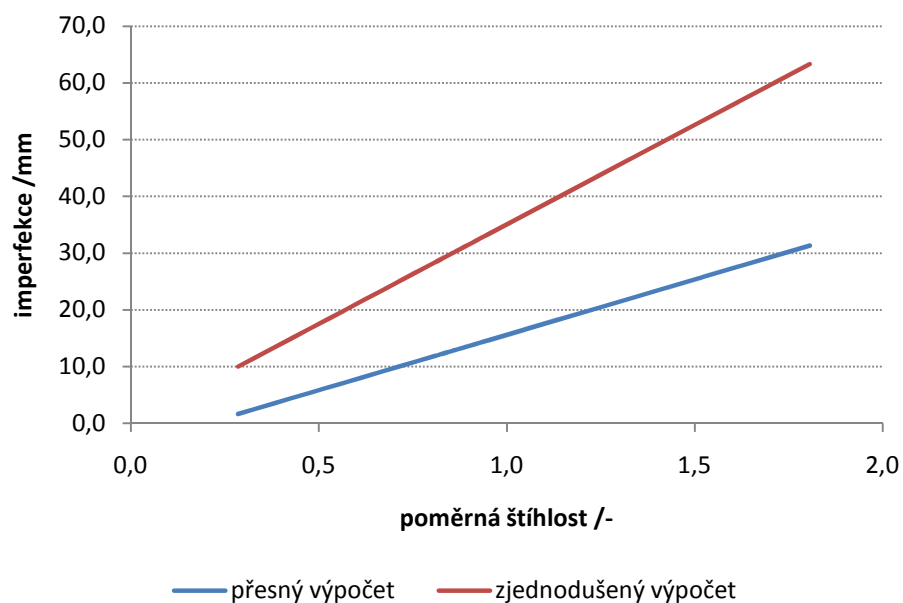
Dále je možné studovat rozdíl v hodnotách vzepětí zjednodušeně (podle vztahu 6.3) a přesně pro konkrétní profil a štíhlost.

Pro tento účel byl zvolen prut IPE 270. Pro vybočení kolmo na měkkou osu profilu přísluší vzpěrná křivka „b“. Z Tabulka 15 je $e/L = 1/296$ (uvažuji 1/300). V řešení je sledována pouze geometrická imperfekce bez vlivu vnitřního pnutí.

α /-	i /mm	h /mm	f /Mpa	E /Mpa	
0,34	30,2	135	235	210 000	
L	λ_p /-	přesně		zjednodušeně	
		e/L	e /mm	e/L	e /mm
1000	0,353	0	0,70	1/300	3,33
1500	0,529	1/993	1,51	1/300	5,00
2000	0,705	1/862	2,32	1/300	6,67
2500	0,881	1/799	3,13	1/300	8,33
3000	1,058	1/761	3,94	1/300	10,00
3500	1,234	1/737	4,75	1/300	11,67
4000	1,410	1/719	5,56	1/300	13,33
4500	1,587	1/706	6,37	1/300	15,00
5000	1,763	1/696	7,18	1/300	16,67
5500	1,939	1/688	7,99	1/300	18,33
6000	2,116	1/682	8,80	1/300	20,00
6500	2,292	1/676	9,61	1/300	21,67

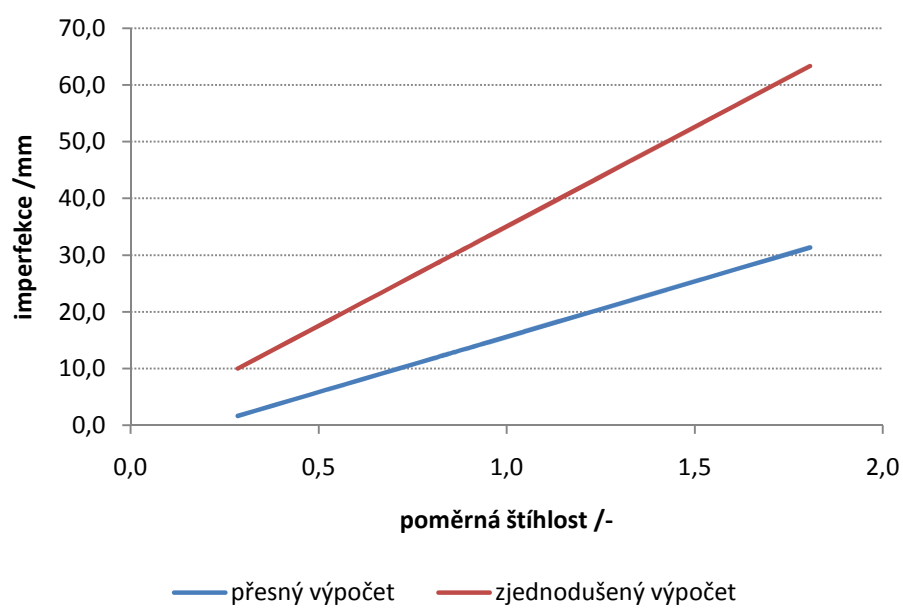
Tabulka 17 - srovnání výsledků výchylek přesně a zjednodušeně

V grafu níže je zobrazen důsledek zjednodušení. Hodnoty zjednodušené jsou více než dvojnásobné oproti přesným.



Obrázek 21- hodnoty imperfekcí pro měkkou osu v závislosti na metodě a štíhlosti

Řešení pro tuhou osu poskytuje stejné odchylky.



Obrázek 22 - hodnoty imperfekcí pro tuhou osu v závislosti na metodě a štíhlosti

Zjednodušení dává o 100-400% vyšší hodnoty.

Článek 5.3.2 (11) v /3/ umožňuje zahrnout globální a lokální imperfekce v jednom počátečním zakřivení. Toto zakřivení je vlastním tvarem vybočení konstrukce s počáteční výchylkou

$$e_o = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) \frac{M_{Rk}}{N_{Rk}} \frac{1 - \chi \cdot \bar{\lambda}^2}{1 - \chi \cdot \bar{\lambda}^2} \gamma_{m1} \quad 6.4$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr}}}$$

kde

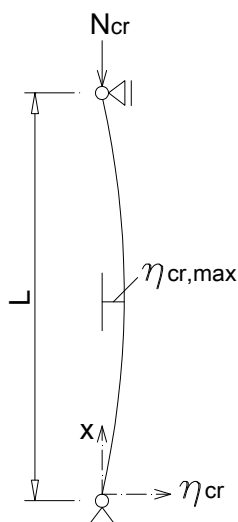
α_{cr}	součinitel kritického zatížení	α	součinitel imperfekce
$\alpha_{ult,k}$	součinitel osových sil pro dosažení charakteristické únosnosti v prostém tlaku		
χ	součinitel vzpěrnosti		
M_{Rk}	charakteristická únosnost v ohybu		
N_{Rk}	charakteristická únosnost v prostém tlaku		

Odstavec 5.3.2 (11) doslova uvádí, že amplituda počátečního zakřivení se má stanovit podle

$$\eta_{init} = e_o \frac{N_{cr} \cdot \eta_{cr}}{EI \eta_{cr,max}''} \quad 6.5$$

η_{cr}	tvár kritického vybočení konstrukce v pružném stavu
$EI \eta_{cr,max}''$	ohybový moment vyvolaný imperfekcí η_{cr} v rozhodujícím průřezu

Vybočení konstrukce není z hlediska výchylek definováno, je bezrozměrné. Pro použití výrazu 6.5 je ale nutné tento tvar popsat. Dokument /8/ uvádí pro kloubově uložený prut následující



$$\eta_{init} = e_o \frac{N_{cr} \cdot \eta_{cr}}{EI \eta_{cr,max}''} = e_o \sin \frac{\pi \cdot x}{L} \quad 6.6$$

Ze vztahu plyne, že norma uvažuje zakřivení prutu ve tvaru funkce sinus. Vlastní tvar vybočení je rovněž funkcí sinus. Aby byly výrazy rovny, zlomek na levé straně musí nahrazovat tuto funkci. Výraz lze ekvivalentně upravit na tvar

$$\eta_{init} = e_o \frac{\eta_{cr}}{\eta_{cr,max}} \quad 6.7$$

Zlomek nyní plní úlohu funkce sinus užitím poměru fiktivních hodnot libovolného rozměru, protože poměr mezi nimi bude zachován vždy. Výraz 6.6 vyjadřuje stejnou skutečnost pomocí momentů. Bylo by vhodnější znak η_{cr} popsat jako pořadnici místo „tvár vybočení“, takové označení může být zavádějící.

Obrázek 23
tvár vybočení

6.2 IZOLOVANÝ PRUT

Konstrukci lze rozdělit na samostatné prvky a každý řešit jako izolovaný prut podle teorie I. řádu. Působení v konstrukci se vystihne vzpěrnou délkou. Prvky jsou posouzeny na možnou ztrátu stability užitím součinitelů vzpěrnosti.

Postup lze provést s absencí výpočetního softwaru, ale je nutné, aby byla konstrukce posouzena jako spolupůsobící se vzájemnou interakcí prvků.

6.3 GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ ANALÝZA NA IMPERFEKTNÍ KONSTRUKCI

Konstrukce se uvažuje jako celek se všemi nedokonalostmi. Výpočet je proveden na takto pokřivené konstrukci podle teorie II. řádu a prvky jsou posouzeny na kombinaci prostého tlaku a prostého ohybu v rozhodujícím průřezu. Za mezní zatížení je považován stav, kdy v nejvíce namáhaných vláknech je dosaženo meze kluzu. Tento způsob posouzení se označuje jako pevnostní posudek. Výpočet je náročný na výpočetní techniku a bez softwaru neproveditelný.

Pro výpočet v programu Scia Engineer je nutné nastavit:

- Aktivovat nelineární výpočet:
 - o funkcionalita => nonlinearity: 2. řád – geometrická nelinearita počáteční deformace a zakřivení
- Nastavit náklon:
 - o Knihovny => konstrukce => počáteční deformace
- Nastavit zakřivení prutu
 - o vzpěrné a relativní délky: imperfekce prutu
- Vytvořit nelineární kombinaci a nastavit jaké imperfekce se mají uvažovat
 - o Imperfekce prutu
 - o Celková imperfekce
- Vytvořit síť prvků
 - o Nastavení => síť prvků => síť
- Nastavení výpočtu
 - o nastavení řešiče => nonlinearity: vybrat metodu řešení (Timoshenko, Newton-Raphson,...)

Zejména výběr metody může výrazně ovlivnit výsledky. Podle [9] Timoshenko je vhodný pro případy, u kterých nedochází k velkým přetvořením (pojem „velké přetvoření“ není blíže určen). Pro velké deformace je nutné použít metodu Newton-Raphson.

Poskytnuté výsledky z metod byly porovnány na jednoduchém prutu, svisle a příčně zatíženém (Obrázek 24). Původní délka prutu je 6m. Číselné porovnání výsledků v tabulce níže. Indexy se vztahují k LSS. (X je osa prutu)

*	u_x /mm	u_z /mm	Délka prutu /mm
Timosenko	37,1	13 482	$\approx 27\,900$
Newton-Raphson	2 686	2 286	6 000

Tabulka 18 - výsledky přetvoření podle metody

Podrobněji v nelineárních výpočtech ve Scia Engineer v /9/.

Pevnostní posouzení nedokáže zohlednit některá specifika připadající stabilitním úlohám. V pevnostním posudku se zavádí imperfekce vztahující se k příslušnému typu ztráty stability. Pro vybočení prutu kolmo k ose Y se prut zakříví ve směru vybočení a sleduje se napětí v nejvíce namáhaných vláknech. Takový postup připadá rovinnému vzpěru. Vedle rovinného vzpěru je nutno řešit i prostorovou ztrátu stability, pro kterou imperfekce není definována. Před provedením pevnostního posudku skrze GNA je proto nutné provést předběžnou analýzu pomocí štíhlosti nebo kritického břemene a ztrátu stability prostorovým vzpěrem takto vyloučit.

Podle Tabulka 14 je možné prut posoudit i plasticky. Plastické posouzení při interakci tlaku a ohybu vede ke složitějšímu výpočtu než v případě, kdy se prvek posuzuje pouze pružně. Vlivem současného osového a ohybového namáhání je nutno ověřit, zda bude mít osová síla vliv na plastický moment únosnosti. Podmínky a posouzení v kapitole 6.2.9.1 /3/.

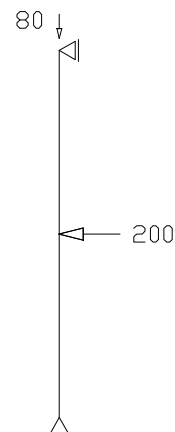
Podle 5.3 /3/ je možné účinek GNA nahradit zatížením vyvolávající stejné namáhání. Zatížení pro zakřivení prutu je funkcí $e_{0,d}$, tato hodnota se spočte z

$$e_{0,d} = e_0 \cdot k_{II} \quad 6.8$$

Vztah není v /3/ uveden, pouze je skryt v obrázku a lze jej dokázat experimentálně.

6.4 POSOUZENÍ PRVKŮ S GLOBÁLNÍMI ÚČINKY

V tomto přístupu se použije pouze imperfekce pro globální analýzu, náklon, a vnitřní síly se spočtou podle GNA. Prvky jsou následně posouzeny na výsledné koncové momenty a osově síly s uvažováním vzpěrných délek jako systémových. Podle /10/ je takový přístup na stranu nebezpečnou v případech, kde rozhoduje vzpěr prutů a nikoliv ztráta stability vlivem posunu styčniců. Autoři v /10/ doporučují uvažovat v takovém případě ekvivalentní vzpěrné délky.



Obrázek 24

7 SROVNÁNÍ ZPŮSOBŮ POSOUZENÍ PRUTŮ NA VZPĚR

7.1 PRUŽNOSTNÍ A PLASTICITNÍ ANALÝZA

Srovnáním pružnostní a plasticitní analýzy na prutu je možné získat představu o plastickém příspěvku na únosnost. K řešení byl použit prut IPE 160, řešený pro tuhou osu, pro různé štíhlosti. Metodika posouzení byla následující:

Prutu bylo uděleno zakřivení podle Tabulka 14 a pevnostně posouzen. Nebyla zohledněna interakce normálové síly a ohybu podle 6.2.9.1 v /3/.

Pružnostní analýza: $e = L/300$ $W_{el,y} = 109\,000\text{ mm}^3$

Plasticitní analýza: $e = L/250$ $W_{pl,y} = 124\,000\text{ mm}^3$

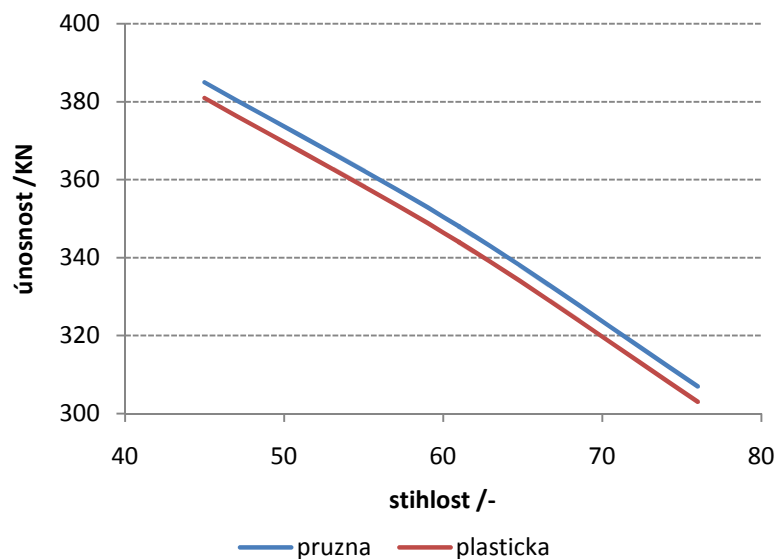
Hledaná únosnost je stanovena iterativním způsobem v programu Microsoft Excel podle

$$\frac{\frac{F}{A} + \frac{F \cdot k_{II} \cdot e}{W}}{f_{yd}} = 1,00$$

F zatěžující síla

k_{II} součinitel druhého řádu

Sledovaná únosnost byla spočtena pro štíhlosti 76 (5m), 61 (4m), 45 (3m). Výsledné průběhy únosností jsou shrnuty v následujícím grafu.



Obrázek 25 - srovnání plastické a pružné únosnosti

Plastická analýza poskytuje vždy nižší únosnost, i když v řádech jednotek kN. Důvodem tohoto chování je větší výchylka pro plasticitní výpočet. Proti této změně jde větší průřezový modul, ale nedostatečně. Po aplikaci článku 6.2.9.1 v /3/ by únosnost dále výrazně klesla. Pro posouzení vzpěrného tlaku pevnostní cestou nemá tedy význam volit plastické posouzení.

7.2 SROVNÁNÍ STABILITNÍCH A PEVNOSTNÍCH POSUDKŮ NA JEDNODUCHÉM PRUTU

Pro porovnání byla vybrána sada prutů o různé štíhlosti, různém způsobu vybočení (měkká, tuhá osa). Tuto sada byla posouzena podle:

- Kapitoly 6.3 /3/. (stabilitní⁵)
- Pevnostním posudkem se zakřivením podle Tabulka 14. (pevnostní 1)
- Pevnostním posudkem s imperfekcí podle rovnice 6.4. (pevnostní 2)

Sada případů:

prut	Vybočení kolmo na	Vzpěrná křivka	Štíhlost
IPE 160	Tuhá osa	a	137
			106
			76
			45
	Měkká osa	b	136
			109
			82
			54

Tabulka 19- sada případů

Pevnostní posudek byl proveden stejně, jako v předcházející kapitole. V řešení se uvažuje pouze pružnostní analýza. V tabulce výsledků jsou tučně podtržené hodnoty, které přísluší jednotkovému posudku rovnému 1,00. Ilustrativní řešení je pro IPE160, vybočení kolmo na tuhou osu.

Momenty pro pevnostní posudek:

$$M_1 = F \cdot k_{II} \cdot \frac{L}{L/e}$$

$$M_2 = F \cdot k_{II} \cdot e_o$$

e_o imperfekce z vlastního tvaru vybočení

⁵ Dále je stabilitní posudek pro porovnání považován za 100% (Strana 47, 48).

Výpočet ekvivalentní výchylky e_o :

f_{yd} /Mpa	A /mm ²	W /mm ³	γ_{m1}	α	α_{cr}	$\alpha_{ult,k}$	$\lambda_{pom.}$	χ	e_o /mm
235	2 010	109 000	1,00	0,21	222	472,4	1,457	0,391	14,32

Tabulka 20 - výpočet ekvivalentní výchylky

A /mm ²	W /mm ³	L /m	L/e	e_o /mm
2 010	109 000	9	300	14,32

Tabulka 21 - vstupní hodnoty

Postup pro štíhlost 137.

F /KN	N _{b,Rd} /KN	N _{cr} /KN	k_{II} /-	M1 /KNm	M2 /KNm	stab.	pevn. 1	pevn. 2
10	184,7	222	1,047	0,31	0,15	0,054	0,033	0,027
20	184,7	222	1,099	0,66	0,31	0,108	0,068	0,055
30	184,7	222	1,156	1,04	0,50	0,162	0,104	0,083
40	184,7	222	1,220	1,46	0,70	0,217	0,142	0,112
50	184,7	222	1,291	1,94	0,92	0,271	0,181	0,142
60	184,7	222	1,370	2,47	1,18	0,325	0,223	0,173
70	184,7	222	1,461	3,07	1,46	0,379	0,268	0,205
80	184,7	222	1,563	3,75	1,79	0,433	0,316	0,239
92	184,7	222	1,708	4,71	2,25	0,498	0,379	0,283
100	184,7	222	1,820	5,46	2,61	0,541	0,425	0,313
111	184,7	222	2,000	6,66	3,18	0,601	0,495	0,359
120	184,7	222	2,176	7,84	3,74	0,650	0,560	0,400
130	184,7	222	2,413	9,41	4,49	0,704	0,643	0,451
138	184,7	222	2,643	10,94	5,22	0,747	0,719	0,496
145	184,7	222	2,883	12,54	5,99	0,785	0,797	0,541
150	184,7	222	3,083	13,88	6,62	0,812	0,859	0,576
159	184,7	222	3,524	16,81	8,02	0,861	0,993	0,650
165	184,7	222	3,895	19,28	9,20	0,893	1,102	0,709
170	184,7	222	4,269	21,77	10,39	0,920	1,210	0,766
175	184,7	222	4,723	24,80	11,84	0,947	1,339	0,833
184	184,7	222	5,842	32,25	15,39	0,996	1,649	0,990
185	184,7	222	6,000	33,30	15,90	1,002	1,692	1,012
190	184,7	222	6,938	39,54	18,88	1,029	1,946	1,139
195	184,7	222	8,222	48,10	22,96	1,056	2,291	1,309
200	184,7	222	10,091	60,55	28,90	1,083	2,787	1,552

Tabulka 22 - průběh zatěžování

$\lambda_{pom.}$	Poměrná štíhlost podle 6.4	χ	součinitel vzpěrnosti dle 6.3 /3/
F	zatížení	N _{b,Rd}	návrhová odolnost ve vzpěru
N _{cr}	kritické zatížení	k_{II}	součinitel druhého řádu
e	výchylka z Tabulka 13		

Součinitele α_{cr} , $\alpha_{ult,k}$, jsou vypočteny pro jednotkové břemeno. V tom případě:

$$\alpha_{cr} = N_{cr}$$

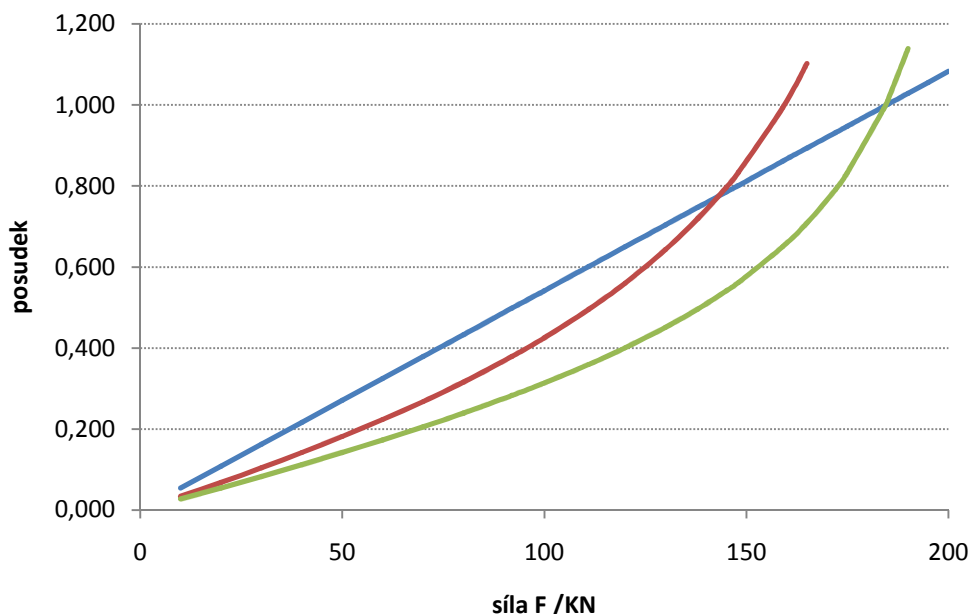
$$\alpha_{ult,k} = N_{Rk}$$

Legenda ke grafům:

modrá přímka
červená křivka
zelená křivka

stabilitní posudek
pevnostní 1
pevnostní 2

Pro ilustrovanou štíhlost: Závislost jednotkových posudků na zatížení



Obrázek 26 - průběhy namáhání pro štíhlost 137

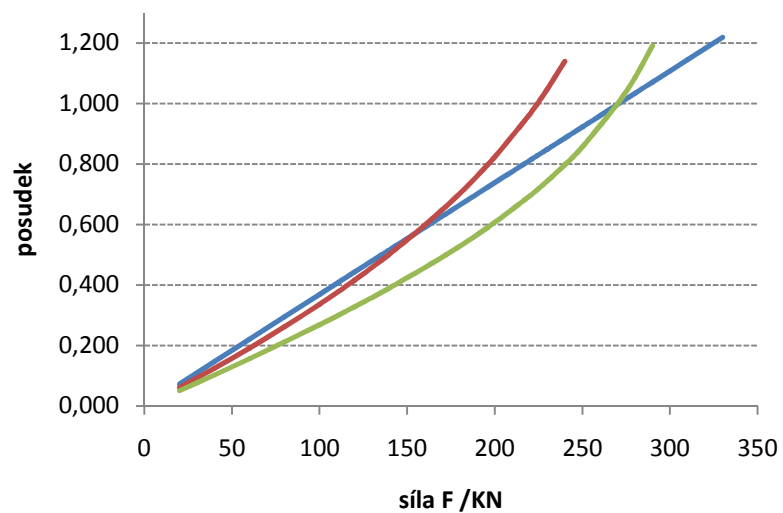
Stabilitní posudek má charakter přímky, protože proměnná je pouze zatížení vyskytující se v čitateli.

Pevnostní posudek 1 je nelineární, do posudku vstupuje součinitel druhého řádu. Únosnost prutu dle tohoto přístupu je o 26KN (14%) menší než u stabilitního posouzení.

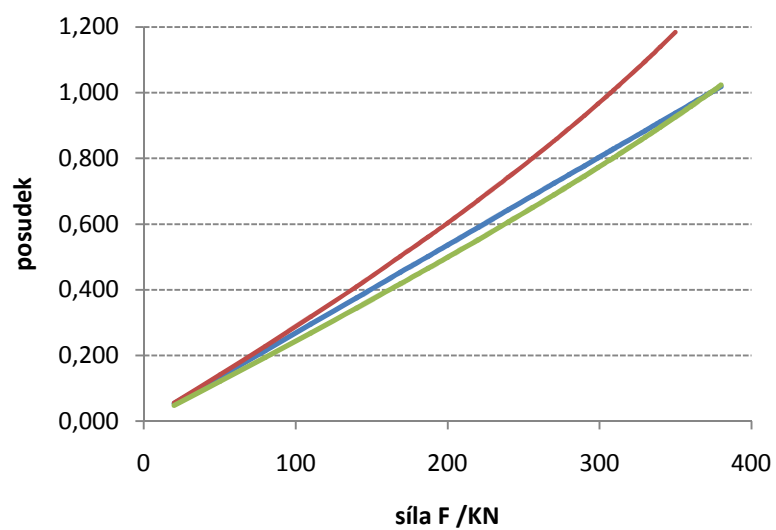
Pevnostní posudek 2 dává ve výsledku stejnou únosnost jako stabilitní výpočet (185KN). Charakter namáhání je však při zvyšování zatížení naprosto odlišný. Podle tohoto přístupu je namáhání prutu ve vzpěru závislé na zatížení příznivým způsobem. Průběh popisuje vzpěr jako složitý, problém s uvážením vzpěrnosti – náchylnosti k vybočení. Lze si všimnout, že při zatížení 140KN (76% únosnosti) je prvek namáhán z 50% své odolnosti. V tomto bodě se jeho chování výrazně mění a prudce roste náchylnost k vybočení. Ověření, do jaké míry tento graf popisuje skutečnost, je možné z experimentů skutečných prvků. Tato otázka je řešena v kapitole 7.2.1.

Pro pevnostní posudky se vstupní výchylky liší dvojnásobně, 14,3mm pro pevnostní posudek 2 a 30mm pro pevnostní posudek 1. Tento velký rozdíl se ve výsledku projevil diferencí „jen“ 26KN.

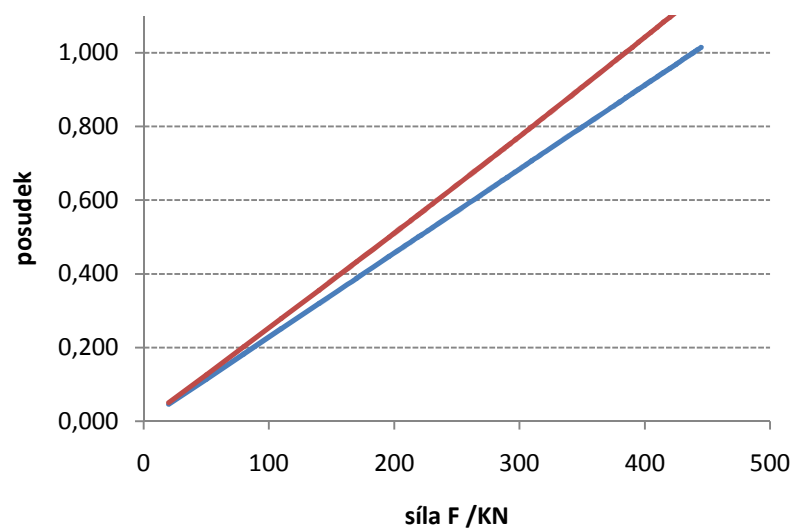
Charakter průběhů namáhání prvku o menších štíhlostech je dále uveden už jen ve výsledných grafech.



Obrázek 27 - průběhy namáhání pro štíhlost 106

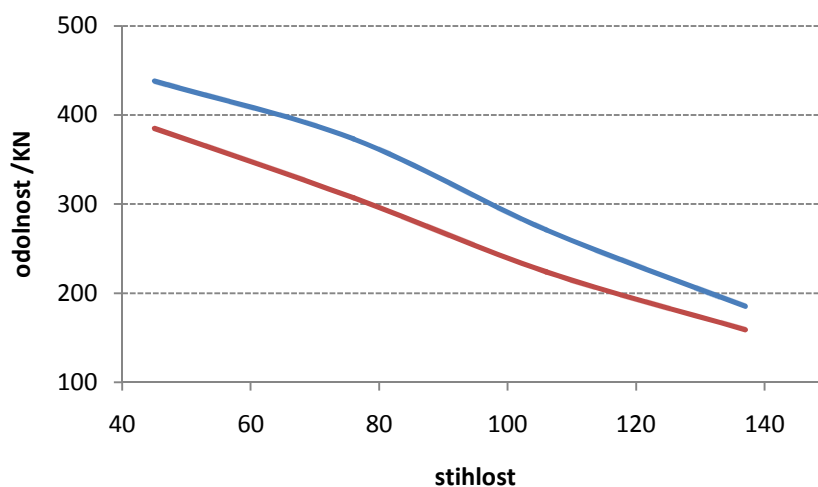


Obrázek 28 - průběhy namáhání pro štíhlost 76

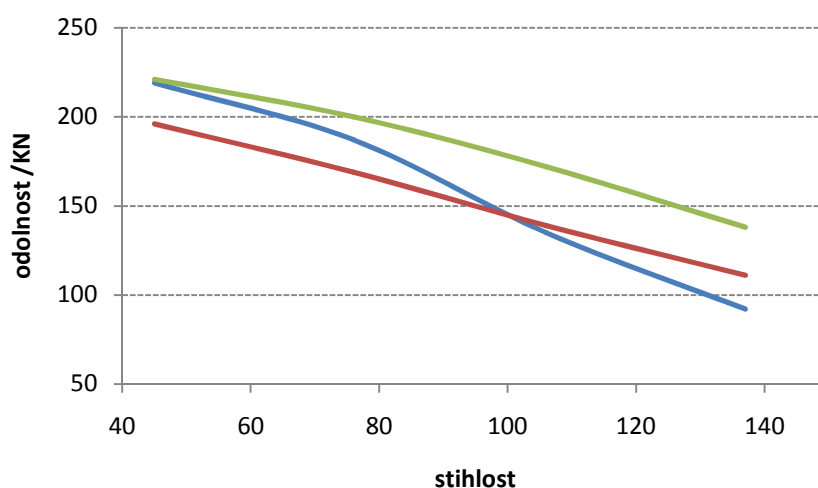


Obrázek 29 - průběhy namáhání pro štíhlost 45

Vynesením hodnot zatížení při úrovni posouzení 1,00 a 0,50 byly sestrojeny následující dva grafy. V prvním grafu je modrá totožná se zelenou křivkou.



Obrázek 30 -jednotkový posudek na úrovni 1,00 (IPE160-tuhá)



Obrázek 31 - jednotkový posudek na úrovni 0,50

Pevnostní posudky se při snižující stihlosti mění na přímku, snižuje se vliv ohybu a převládá tlakové namáhání. Menší únosnost pevnostního posudku 1 ve srovnáním se stabilitním se postupně snižuje s rostoucí stihlostí, nicméně zachovává se. Rozdíly pro úroveň posouzení 1,00 v tabulce níže.

stihlost	$\Delta N_{b,Rd} / \text{KN}$	$\Delta N_{b,Rd} / \%$
137	26	14
106	47	17
76	66	18
45	53	12

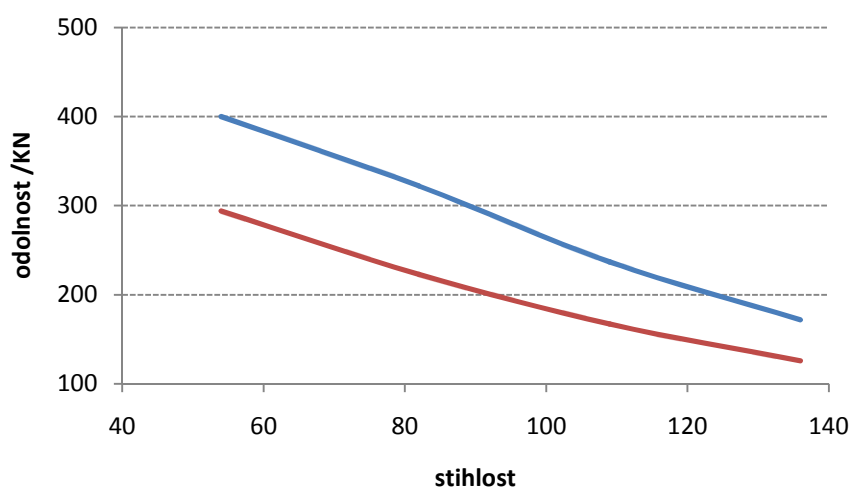
Tabulka 23 - rozdíl v odolnosti mezi stabilitním a pevnostním posudkem 1 na úrovni 1,00 (IPE160-tuhá)

V Tabulka 24 je rozdíl mezi stabilitním a příznivějším pevnostním posudkem 2 vyjádřen číselně.

štíhlost	$\Delta N_{b,Rd} / \text{KN}$	$\Delta N_{b,Rd} / \%$
137	46	50
106	37	27
76	13	7
45	2	1

Tabulka 24- rozdíl v odolnosti mezi stabilitním a pevnostním posudkem 2 na úrovni 0,50

Chování stejného prutu bylo sledováno i pro vybočení kolmo ne měkkou osu. Průběhy posudků zůstávají naprosto stejné, mění se pouze číselné rozdíly.



Obrázek 32 - jednotkový posudek na úrovni 1,00 (IPE160-měkká)

štíhlost	$\Delta N_{b,Rd} / \text{KN}$	$\Delta N_{b,Rd} / \%$
136	46	27
109	70	30
82	99	31
54	106	27

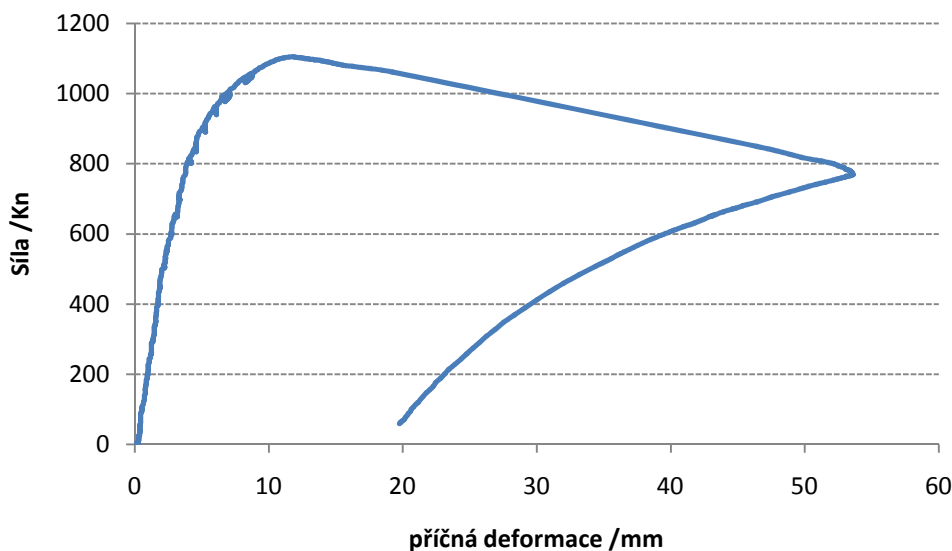
Tabulka 25 -rozdíl v odolnosti mezi stabilitním a pevnostním posudkem 1 na úrovni 1,00 (IPE160-měkká)

V tomto případě se hodnoty zvětšily dvojnásobně, i procentuálně (viz Tabulka 23 a Tabulka 25). Rezerva pevnostního posudku 2 oproti stabilitním zůstává při úrovni posouzení 0,50 stejná.

Z uvedených příkladů plyne, že pevnostní posudek 2 neposkytuje žádnou výhodu, protože maximální zatížitelnost je shodná se stabilitním pojetím (pokud je uvažováno pouze tlakové namáhání). Odolnost ze stabilitního výpočtu vychází ze statistického vyhodnocení zkoušek reálných prutů /11/, a proto je toto řešení považováno za určující. Pevnostní posudek 1 prvky (jako kyvné stojky) tedy výrazně podceňuje.

7.2.1 EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA

Data týkající se zkoušek, které jsou uvedeny v této kapitole, pochází z výzkumu doc. Ing. Marcely Karmazínové, CSc. Na Obrázek 33 je jeden experiment ilustrován. Jedná se o profil HEA 160, délky 3m, S355, sleduje se vybočení kolmo na měkkou osu a je měřeno příčné posunutí v polovině délky.



Obrázek 33 - průběh zatěžovací zkoušky vzpěrného tlaku

Výpočtová odolnost podle 6.3 v /3/

$$\bar{\lambda} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{1}{93,9 \cdot \varepsilon} = \frac{3000}{39,8 \cdot 93,9 \cdot 0,81} = 0,985 \Rightarrow \chi = 0,548$$

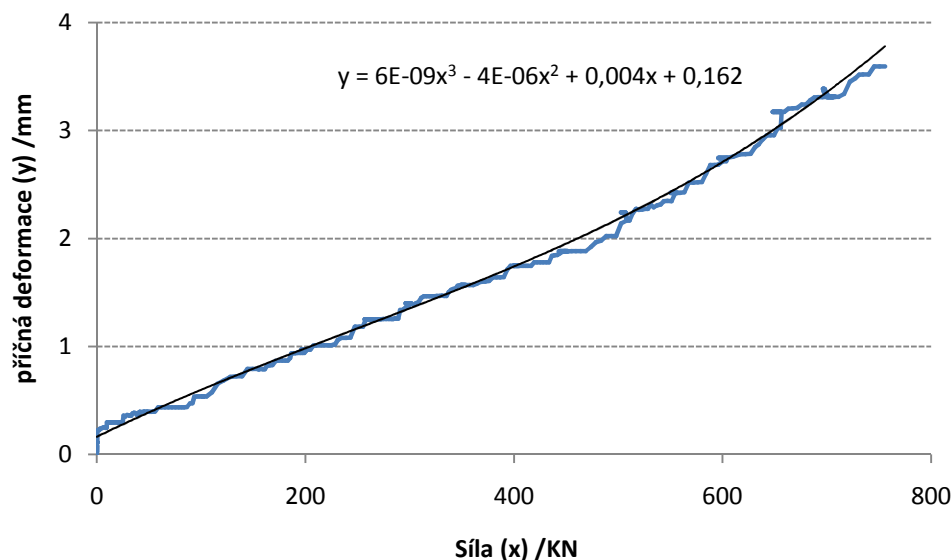
$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{m1}} = \frac{0,548 \cdot 3877 \cdot 355}{1,00} = 755,5 \text{ kN}$$

Průběh deformace do této meze je na Obrázek 34 a měřené body jsou proloženy regresní křivkou, jejíž rovnice je v grafu. Pro srovnání bude použita křivka deformace získaná z pevnostního posudku 2 podle výrazu

$$a = e_o \cdot k_{II} - e_o$$

a	příčná deformace	e_o	poč. výchylka z vl. tvaru vybočení
k_{II}	součinitel druhého řádu		

Počáteční výchylka byla spočtena stejnou metodikou jako v Tabulka 20 a má hodnotu 7,64mm. S touto výchylkou je odolnost opět shodná se stabilitním posudkem.

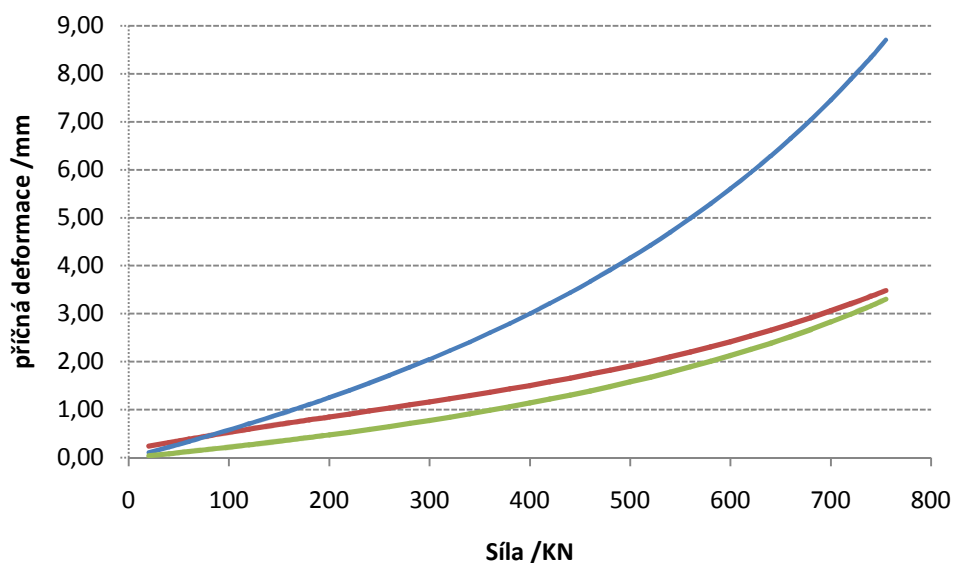


Obrázek 34 - průběh příčné deformace do výpočtové meze odolnosti

Samotné srovnání je na Obrázek 35 níže. Modrá křivka je vytažena přímo z pevnostního posudku 2. Je to příčná deformace na výpočtovém modelu pro pevnostní posudek 2. Červená křivka přísluší deformaci z experimentu. Pro její vynesení byla použita rovnice regresní křivky. Zelená křivka reprezentuje totéž jako křivka modrá, pouze s hodnotou počáteční deformace 2,9mm. S touto hodnotou se dostatečně blíží červené křivce.

e_o /mm	Jednotkový posudek
7,64	0,999
2,90	0,719

Tabulka 26 - posudky závislé na počáteční deformaci



Obrázek 35 - srovnání příčné deformace z experimentu a z modelování

Vyšší počáteční zakřivení je voleno z důvodu bezpečnosti, spolehlivosti (viz Tabulka 26). Lze tedy prohlásit, že průběhy pevnostního posudku 2 nejsou pouze fiktivním modelem, ale vystihují reálné chování prutu při vzpěrném tlaku s určitou spolehlivostí. Potom je možné mluvit o vzpěrnosti, která vystihuje náchylnost prvku k vybočení při určité hladině zatížení. Ta je výrazná zejména u vyšších štíhlostí (viz Obrázek 26).

Nabízí se zde myšlenka, zda by bylo možné využít odlišného posouzení mezi stabilitním a pevnostním posudkem 2 (viz Obrázek 26) do rovnic 6.61 a 6.62 v /3/. Pro zatížení 100KN je stabilitní posudek 0,50 a pevnostnímu posudku 2 přísluší 0,30. Konstrukci by tak bylo možné více zatížit. Tato otázka je řešena v následující kapitole.

7.2.2 KOMBINACE TLAKU A OHYBU

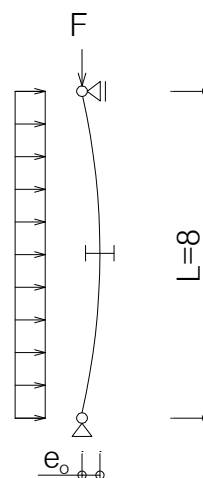
Srovnání zatížitelnosti podle rovnice 6.61 a z pevnostního pojetí bylo provedeno na modelu podle Obrázek 36 pro intenzitu vodorovného zatížení od nuly do maximálního zatížení a pro sílu od nuly do maximální síly. Z důvodu totožnosti výsledků pro jakoukoliv kombinaci svislého a vodorovného zatížení (ale v mezích únosnosti) je uveden pouze ilustrativní příklad pro konkrétní sestavu.

$$F = 268 \text{ KN} \quad q = 3 \text{ KN/m}$$

PEVNOSTNÍ POSOUZENÍ

Ekvivalentní výchylka

$$e_o = \alpha \left(\frac{L/i}{\lambda_1} - 0,2 \right) \frac{W}{A} = 0,21 \left(\frac{8000/91,1}{93,9} - 0,2 \right) \frac{252 \cdot 10^3}{3337} = 11,7 \text{ mm}$$



Obrázek 36 - model pro tlak + ohyb

Průhyb od příčného zatížení

$$w_q = \frac{5}{384} \frac{q \cdot L^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{3 \cdot 8000^4}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 2,77 \cdot 10^7} = 27,5 \text{ mm}$$

Pružná kritická síla

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2} = \pi^2 \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 2,77 \cdot 10^7}{8000^2} = 898 \text{ KN}$$

Součinitel druhého řádu

$$k_{II} = \frac{1}{1 - \frac{F}{N_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{268}{898}} = 1,43$$

Posouzení

$$\left(\frac{F}{A} + \frac{F \cdot k_{II} \cdot (e_o + w_q)}{W} + \frac{0,125 \cdot q \cdot L^2}{W} \right) / f_{yd} \leq 1,00$$

A plocha průřezu W modul průřezu
f_{yd} návrhová odolnost

$$\text{dosazení} \quad \left(\frac{268 \cdot 10^3}{3337} + \frac{268 \cdot 10^3 \cdot 1,43 \cdot (11,7 + 27,5)}{2,52 \cdot 10^5} + \frac{0,125 \cdot 3 \cdot 8000^2}{2,52 \cdot 10^5} \right) / 235 =$$

$$= (80,3 + 59,6 + 95,1) / 235 = 1,00 \leq 1,00 \dots o.k.$$

POSOUZENÍ ROVNICÍ 6.61

Předpokladem řešení je skutečnost, že profil neklopí.

$$\text{návrhová odolnost ve vzpěru} \quad N_{b,Rd} = \frac{A \cdot f_y \cdot \chi}{\gamma_{m1}} = \frac{3337 \cdot 235 \cdot 0,711}{1,00} = 557 \text{ KN}$$

$$\text{návrhová odolnost v prostém ohybu} \quad M_{c,Rd} = \frac{W \cdot f_y}{\gamma_{m0}} = \frac{2,52 \cdot 10^5 \cdot 235}{1,00} = 59,2 \text{ KNm}$$

součinitel interakce k_{yy} : z průběhu momentů $\alpha_h=0$, $\psi=1,0 \Rightarrow C_{my} = 0,95$

$$\text{prvek je náchylný ke zkroucení} \Rightarrow C_{my} \left(1 + 0,6 \bar{\lambda} \frac{F}{N_{b,Rd}} \right) \leq C_{my} \left(1 + 0,6 \frac{F}{N_{b,Rd}} \right)$$

$$0,95 \left(1 + 0,6 \cdot 0,94 \frac{268}{557} \right) = 1,208 \leq 0,95 \left(1 + 0,6 \frac{268}{557} \right) = 1,224 \dots o.k.$$

posouzení

$$\frac{F}{N_{b,Rd}} + k_{yy} \frac{0,125 \cdot q \cdot L^2}{M_{c,Rd}} \leq 1,00 = \frac{268}{557} + 1,208 \frac{0,125 \cdot 3 \cdot 8^2}{59,2} = 0,481 + 0,490 = 0,971 \leq 1,00 \dots o.k.$$

Vzhledem ke složitosti výpočtu součinitele k_{yy} lze výsledky považovat za totožné. Příznivý pevnostní posudek vzpěru oproti stabilitnímu pojetí v závěru nevede k vyšší zatížitelnosti.

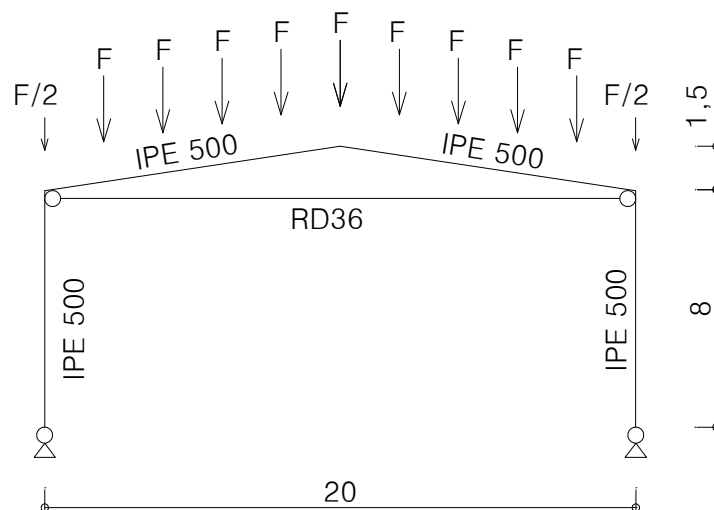
7.3 SROVNÁNÍ STABILITNÍCH A PEVNOSTNÍCH POSUDKŮ NA RÁMECH

V kapitole jsou studovány výsledky posudků stability na rámových vazbách s odlišným konstrukčním systémem. Opět se porovnává stabilitní, pevnostní posudek 1, a pevnostní posudek 2. V kapitole 7.2 byl v pevnostním posudku 1 zanedbán vliv globální imperfekce, náklonu, aby bylo možné úlohy řešit ručně pomocí součinitele druhého řádu. Pro výpočet rámu již je využita výpočetní technika a tato imperfekce je tedy zohledněna.

Řešení je založeno na předpokladech, že nerozhoduje vybočení z roviny ani globální zkroucení, je řešena pouze rovina rámu. Přetvoření konstrukce nebylo kontrolováno.

Zatížení konstrukce $F = 38 \text{ kN}$ pro mezní stav únosnosti
 $F = 1 \text{ kN}$ pro stabilitní výpočty

PŘÍČNÁ VAZBA I



Obrázek 37 - příčná vazba I

Aby bylo možné v tomto případě porovnat výsledky je zaveden ještě jeden předpoklad, a sice takový, že obvodový plášť zajistí ztrátu příčné a torzní stability sloupů. Důvodem je složitá metodika pevnostního posouzení klopení. Pro klopení se má podle [3] zavést rovněž vyosení nosníku. Na této střednici potom působí příčné zatížení. V tomto případě by se úloha stala prostorovou, zakřivení by bylo z roviny rámu. Nicméně sloup je namáhán ohybem přeneseným z příčle a nikoli příčným zatížením, které by mohlo působit na zakřivené střednici. Úloha by byla z pevnostního hlediska obtížně řešitelná.

Zatřídění průřezu IPE 500:

$$\Psi = -0,84 \Rightarrow \frac{c_w}{t_w} = \frac{426}{10,2} = 41,8 < \frac{42\varepsilon}{0,67 + 0,33\Psi} = \frac{42 \cdot 1}{0,67 + 0,33 \cdot (-0,84)} = 107 \dots III. tř.$$

$$\frac{c_f}{t_f} = \frac{74}{16} = 4,6 < 9 \dots I. tř.$$

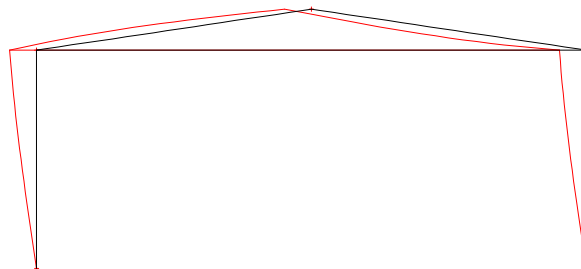
průřez je III. Třídy

a) Stabilitní posouzení

ze stabilitního výpočtu v rovině
kritická síla pro levý sloup

$$\alpha_{cr} = F = 355 \text{ kN}$$

$$N_{cr} = 5 \cdot \alpha_{cr} = 5 \cdot 355 = 1775 \text{ kN}$$



38 - způsob ztráty stability I

vzpěrná délka

$$L_{cr} = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 4,82 \cdot 10^8}{1800000}} = 23,57 \text{ m}$$

štíhlost

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{23570}{204} = 116 < 150 \dots \text{ok.}$$

součinitel vzpěrnosti pro vzpěrnou křivku „a“

$$\chi = 0,512$$

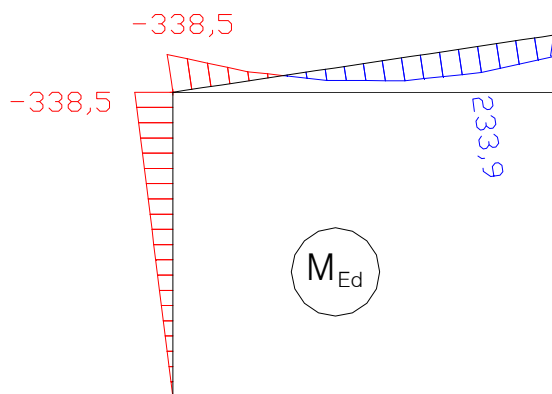
návrhová odolnost ve vzpěru

$$N_{b,Rd} = \frac{A \cdot f_y \cdot \chi}{\gamma_{m1}} = \frac{11550 \cdot 235 \cdot 0,512}{1,00} = 1390 \text{ kN}$$

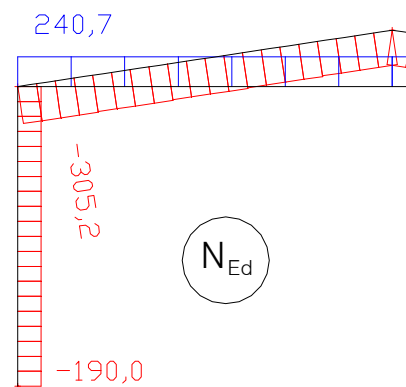
návrhová odolnost v prostém ohybu

$$M_{c,Rd} = \frac{W \cdot f_y}{\gamma_{m0}} = \frac{1,927 \cdot 10^6 \cdot 235}{1,00} = 453 \text{ kNm}$$

o Statika (lineární výpočet)



39 - návrhové ohybové momenty – Ia



40 - návrhové osově síly – Ia

- Posouzení

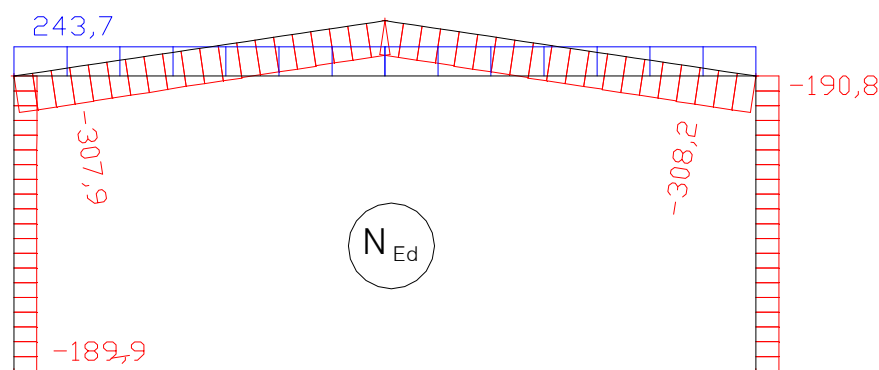
$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{190}{1390} + \frac{348}{453} = 0,137 + 0,768 = 0,905 < 1,0 \dots ok$$

b) Pevnostní posudek 1

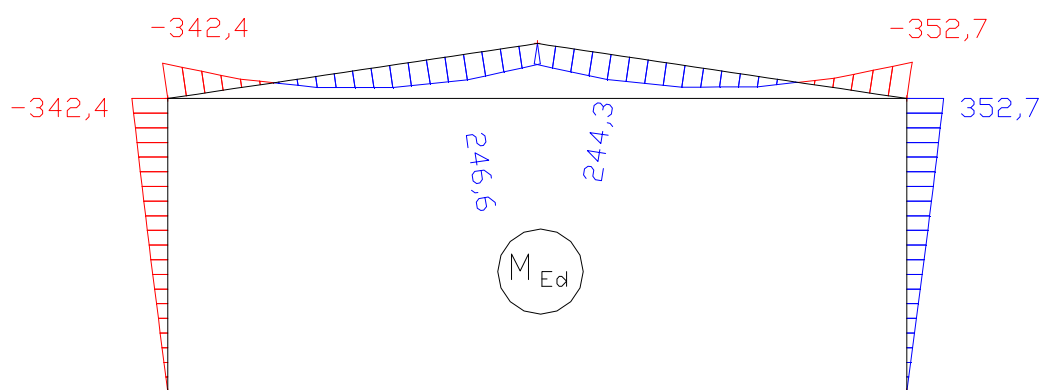
GNA je závislá na tuhostech průřezů a pokud má být nyní provedena globální GNA je nezbytné, aby všechny prvky byly navrženy na účinky zatížení, alespoň přibližně. Jejich návrhy zde nejsou uvedeny.

Uvažují se imperfekce zakřivení a náklonu podle 5.3.2 /3/. Výpočet proveden nelineárně, metodou Newton-Raphson, počet přírůstků 5. Toto nastavení je shodné pro všechny následující případy.

- Statika



41 - návrhové osové síly Ib



42 - návrhové ohybové momenty Ib

- Posouzení na prostý tlak a prostý ohyb pro pravý sloup, (ve styčnicku)

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{Ed}}{W} = \frac{190,8 \cdot 10^3}{11550} + \frac{362 \cdot 10^6}{1,928 \cdot 10^6} = 16,5 + 188 = 204,5 MPa \Rightarrow 0,87 < 1,0 \dots ok$$

c) Pevnostní posudek 2

$$\alpha_{ult} = \frac{f_y \cdot A}{5 \cdot F} = \frac{235 \cdot 11550}{5 \cdot 1000} = 543 \text{ KN}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult}}{\alpha_{cr}}} = \sqrt{\frac{543}{355}} = 1,236$$

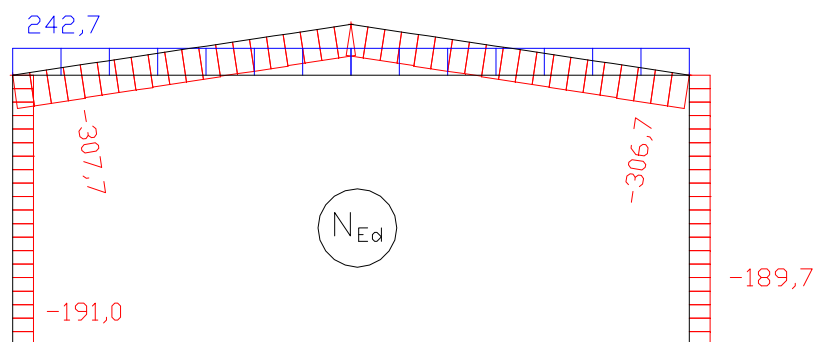
Poměrná štíhlost

Lze ukázat, že takto spočtená štíhlost je shodná se štíhlostí spočtenou ze štíhlosti ze stabilitního posouzení.

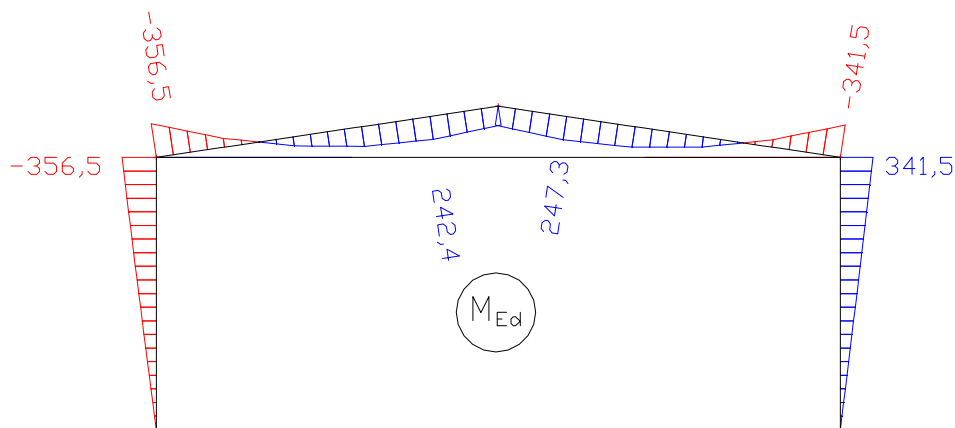
$$\text{Ekvivalentní výchylka} \quad e_o = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) \frac{W}{A} = 0,21(1,236 - 0,2) \frac{1,928 \cdot 10^6}{11550} = 36,1 \text{ mm}$$

Při výpočtu zanedbávám poslední zlomek z výrazu 6.4, protože pro γ_{m1} je roven jedničce.

o Statika



43 - návrhové osové síly Ic



44 - ohybové momenty - Ic

o Posouzení pro levý sloup (ve styčníku)

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{Ed}}{W} = \frac{191 \cdot 10^3}{11550} + \frac{357 \cdot 10^6}{1,928 \cdot 10^6} = 16,5 + 185 = 201,5 \text{ MPa} \Rightarrow 0,856 < 1,0 \dots \text{ok}$$

Tabulka výsledků

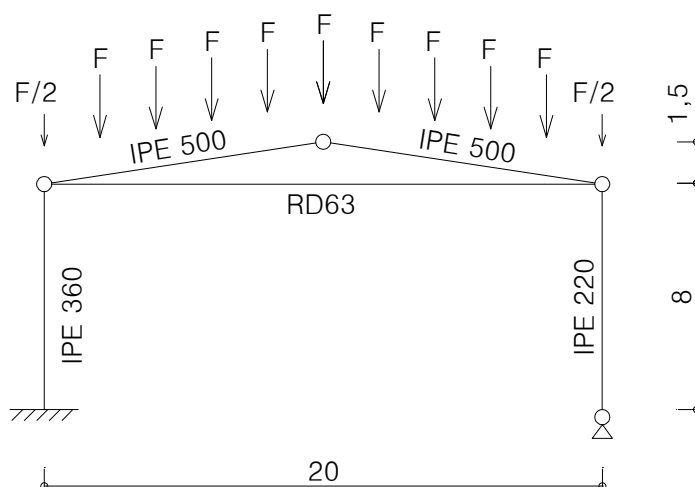
Metoda	Posudek
Stabilitní	0,905
Pevnostní 1	0,870
Pevnostní 2	0,856

Tabulka 27 - srovnání posudků na příčné vazbě I

$$m_1 = 105,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}} 8\text{m} \cdot 2 = 1690\text{kg}$$

Hmotnost není konečná, profil by bylo nutné dále zvětšit na vykrytí účinků větru.

PŘÍČNÁ VAZBA II



Obrázek 45 - příčná vazba 2

ZATŘÍZENÍ PRŮŘEZU IPE 360

$$\Psi = -0,006 \Rightarrow \frac{c_w}{t_w} = \frac{298,6}{8} = 37 < \frac{42\varepsilon}{0,67 + 0,33\Psi} = \frac{42 \cdot 1}{0,67 + 0,33 \cdot (-0,006)} = 63 \dots \text{III. tř.}$$

$$\frac{c_f}{t_f} = \frac{63}{12,7} = 5 < 9 \dots \text{I. tř.}$$

průřez je III. třídy

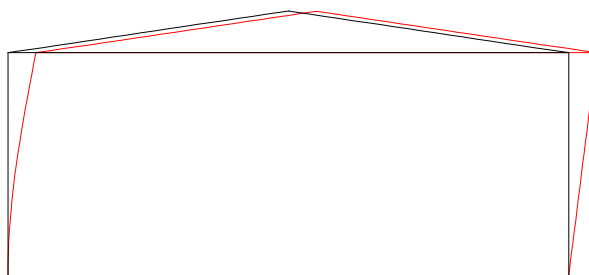
a) Stabilitní posouzení

LEVÝ SLOUP

ze stabilitního výpočtu v rovině
kritická síla

$$\alpha_{cr} = 143 \text{ KN}$$

$$N_{cr} = 5 \cdot \alpha_{cr} = 5 \cdot 143 = 716 \text{ KN}$$



46 - způsob ztráty stability II

vzpěrná délka
$$L_{cr} = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 16,27 \cdot 10^7}{716000}} = 21,70m$$

štíhlost
$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{21700}{150} = 145 < 150 \dots ok.$$

součinitel vzpěrnosti pro vzpěrnou křivku „a“ $\chi = 0,354$

návrhová odolnost ve vzpěru
$$N_{b,Rd} = \frac{A \cdot f_y \cdot \chi}{\gamma_{m1}} = \frac{7273 \cdot 235 \cdot 0,354}{1,00} = 605 KN$$

Posouzení
$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} = \frac{190}{605} = 0,314 < 1,0 \dots ok$$

V tomto případě má prvek velkou rezervu, protože pro návrh je rozhodující mezní štíhlost (150), nikoliv odolnost. Rezerva by se využila k přenosu ohybu a navržený profil je možné považovat za konečný.

PRAVÝ SLOUP

Vzpěrná délka $L_{cr} = 8m$

Štíhlost
$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{8000}{91,1} = 88 < 150 \dots ok.$$

Součinitel vzpěrnosti pro křivku a $\chi = 0,711$

návrhová odolnost ve vzpěru
$$N_{b,Rd} = \frac{A \cdot f_y \cdot \chi}{\gamma_{m1}} = \frac{3337 \cdot 235 \cdot 0,711}{1,00} = 557 KN$$

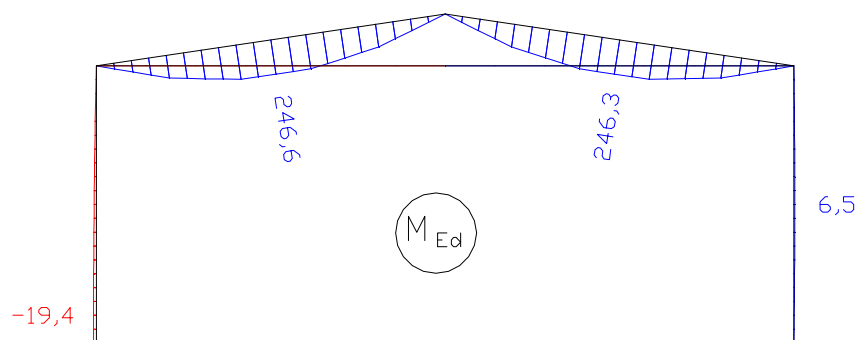
posouzení
$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} = \frac{190}{557} = 0,340 < 1,0 \dots ok$$

b) Pevnostní posudek 1

- Posouzení pro levý sloup, průřez v patě

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{Ed}}{W} = \frac{189,9 \cdot 10^3}{7273} + \frac{19,4 \cdot 10^6}{903,6 \cdot 10^3} = 26,1 + 22 = 48,1 MPa \Rightarrow 0,205 < 1,0 \dots ok$$

- Statika⁶

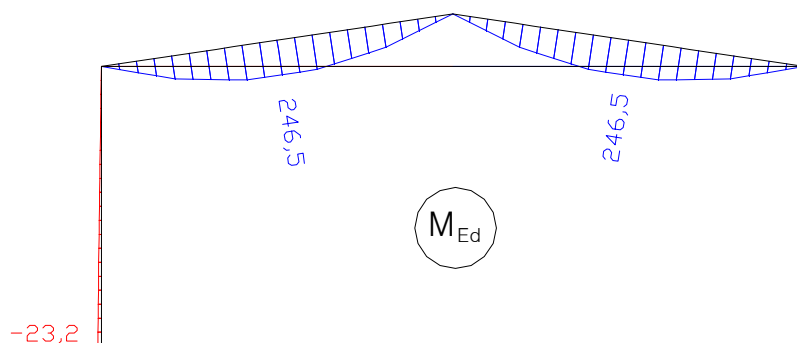


47- návrhové ohybové momenty IIb

c) Pevnostní posudek 2

$$e_o = \alpha \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 0,2 \right) \frac{W}{A} = 0,21 \left(\frac{145}{93,9} - 0,2 \right) \frac{903,6 \cdot 10^3}{7273} = 35 \text{ mm}$$

- Statika



48 - návrhové momenty IIc

Na pravém sloupu zde jsou nulové momenty, protože tento výpočet vychází z vlastního tvaru vybočení, ve kterém je tento sloup jako kyvná stojka a ve stavu vybočení tedy není prohnutá. Naproti tomu imperfekce, užitá v pevnostním posudku 1, nastavují zakřivení pro každý prut (poměrem e/L).

- Posouzení pro levý sloup, průřez v patě

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{Ed}}{W} = \frac{190 \cdot 10^3}{7273} + \frac{23,2 \cdot 10^6}{903,6 \cdot 10^3} = 26,1 + 25,7 = 51,8 \text{ MPa} \Rightarrow 0,220 < 1,0 \dots \text{ok}$$

⁶ Osové síly se v jednotlivých případech liší minimálně, proto dále nejsou uvedeny.

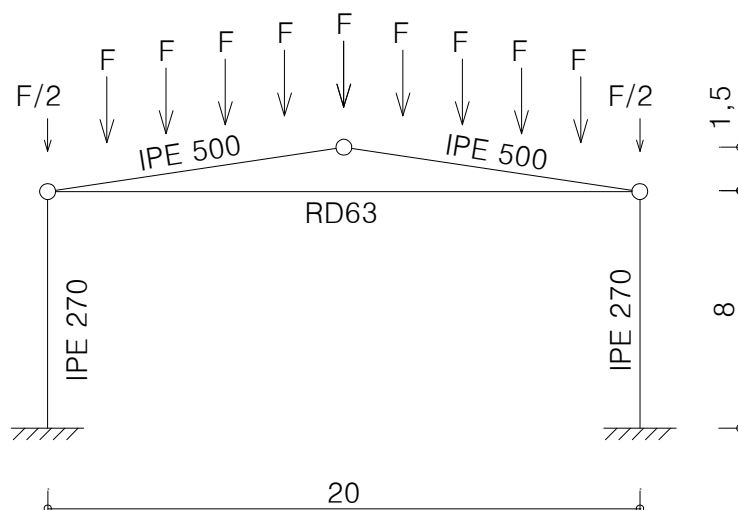
Výsledky v tabulce

Metoda	Posudek
Stabilitní	0,314
Pevnostní 1	0,205
Pevnostní 2	0,220

Tabulka 28- srovnání výsledků na příčné vazbě II

Objem oceli na sloupy příčné vazby: $m_2 = 57,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}} 8\text{m} + 26,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} 8\text{m} = 667\text{kg}$

PŘÍČNÁ VAZBA III



Obrázek 49 - příčná vazba III

$$\Psi = +0,12 \Rightarrow \frac{c_w}{t_w} = \frac{219,6}{6,6} = 33 < \frac{42\varepsilon}{0,67 + 0,33\Psi} = \frac{42 \cdot 1}{0,67 + 0,33 \cdot 0,12} = 58 \dots \text{III. tř.}$$

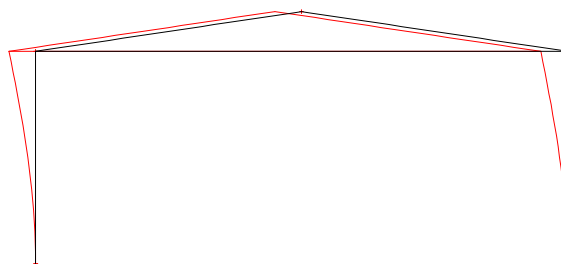
$$\frac{c_f}{t_f} = \frac{49,2}{10,2} = 5 < 9 \dots \text{I. tř.}$$

průřez je III. třídy

a) Stabilitní posouzení

$$\alpha_{cr} = F = 94\text{KN}$$

$$N_{cr} = 5 \cdot \alpha_{cr} = 5 \cdot 94 = 470\text{ KN}$$



Obrázek 50- tvar vybočení III

vzpěrná délka $L_{cr} = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 5,79 \cdot 10^7}{470000}} = 16,0m$

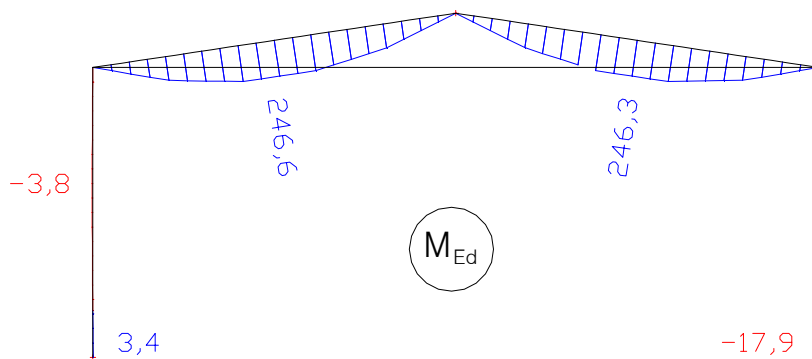
štíhlost $\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{16000}{112} = 143 < 150 \dots ok.$

součinitel vzpěrnosti pro vzpěrnou křivku „a“ $\chi = 0,365$

návrhová odolnost ve vzpěru $N_{b,Rd} = \frac{A \cdot f_y \cdot \chi}{\gamma_{m1}} = \frac{4595 \cdot 235 \cdot 0,365}{1,00} = 394KN$

posouzení $\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} = \frac{190}{394} = 0,482 < 1,0 \dots ok$

b) Pevnostní posudek 1

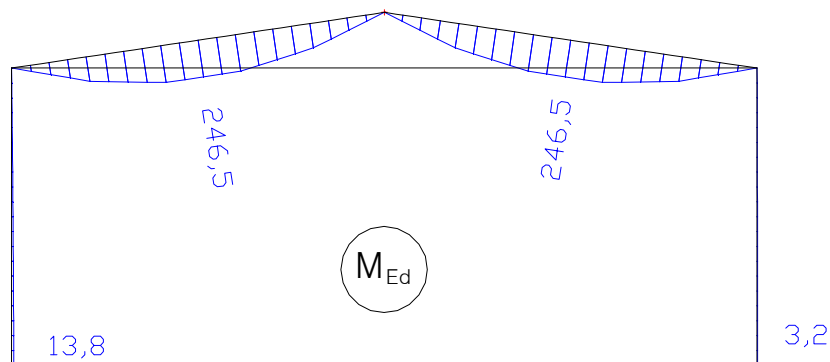


Obrázek 51 - návrhové ohybové momenty IIIb

- Posouzení pro pravý sloup, průřez v patě

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{Ed}}{W} = \frac{190 \cdot 10^3}{4595} + \frac{17,9 \cdot 10^6}{428,9 \cdot 10^3} = 41,3 + 41,7 = 83MPa \Rightarrow 0,353 < 1,0 \dots ok$$

c) Pevnostní posudek 2



Obrázek 52 - návrhové ohybové momenty IIIc

Ekvivalentní výchylka
$$e_o = \alpha \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 0,2 \right) \frac{W}{A} = 0,21 \left(\frac{143}{93,9} - 0,2 \right) \frac{428,9 \cdot 10^3}{4595} = 25,9 \text{ mm}$$

- Posouzení pro levý sloup, průřez v patě

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{Ed}}{W} = \frac{190 \cdot 10^3}{4595} + \frac{13,8 \cdot 10^6}{428,9 \cdot 10^3} = 41,3 + 32,2 = 73,5 \text{ MPa} \Rightarrow 0,313 < 1,0 \dots \text{ok}$$

Tabulka výsledků

Metoda	Posudek
Stabilitní	0,482
Pevnostní 1	0,353
Pevnostní 2	0,313

Tabulka 29 - srovnání výsledků na příčné vazbě III

Objem oceli na sloupy příčné vazby:
$$m_3 = 36,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}} 8 \text{ m} = 578 \text{ kg}$$

Výsledky na řešených příčných vazbách poskytují tyto závěry. Stabilitní posudek je nebezpečnější, pevnostní posudek 2 dává nejnižší hodnotu, pouze ve druhém případě mírně převyšuje pevnostní posudek 1. Pravděpodobně proto, že počáteční deformace je v pevnostním posudku 1 stejná pro všechny případy, zatímco v pevnostním posudku 2 je závislá na tvaru vybočení, štíhlosti, profilu a pro každý případ má unikátní hodnotu. Výsledky pevnostního posudku 1 a 2 jsou vždy srovnatelné.

Normativní předpis EC3 umožňuje posouzení stability pevnostním způsobem, ale nepřímou pevnostní posudky zakazuje, protože nepředepisuje, jakým způsobem pevnostně posoudit současné působení vzpěrného tlaku a klopení. Pokud by nebylo bráněno klopení, pevnostní posudky nejsou proveditelné a jediný možný způsob posouzení je dle rovnic 6.61 a 6.62 dle /3/.

Řešené příklady nezohledňují účinky vodorovného zatížení. Pokud rozhoduje posun styčníků, tyto účinky je nutné začlenit do výpočtu podle 5.2.1 /3/ nebo podle /11/.

Materiálová náročnost sloupů jednotlivých vazeb je shrnuta v následující tabulce.

vazba	Hmotnost [kg]
I	1690
II	667
III	578

Tabulka 30 - objem oceli pro příčné vazby

8 ZÁVĚR

Práce je uvedena charakteristikou tlakového namáhání ocelových prvků. Ze srovnání odolností ve vzpěru bylo zjištěno, že pro tlakové namáhání nemá smysl užívat oceli vyšších tříd než S235, protože stabilitní problémy jsou záležitostí tuhosti.

Následující kapitola byla věnována významu a výpočtu Eulerovi kritické síly pomocí energie systému a iterační metody. V úvodu do vzpěrných délek byla odvozena návrhová příčná síla, kterou lze vypočítat na základě ekvivalentních vodorovných účinků. Obvykle se uvažuje jako 1/100 ze svislého zatížení.

V závěru teoretické části bylo studováno chování prvku s počátečním zakřivením iteračním přístupem a navrhnout zjednodušující postup pro geometricky nelineární výpočet ne jednoduchém prutu.

Praktická část byla otevřena tématem vzpěrných délek. Bylo vybráno několik přístupů, u nichž byly stanoveny výhody, nedostatky a následně použity na vybraných rámech. Na základě srovnání byla jako nejvhodnější z pohledu rychlosti, praktičnosti, obecnosti a správnosti vybrána metoda stabilitního výpočtu ve Scia Engineer (v rovině) s následným dopočtem vzpěrné délky. Je vhodné srovnat více hodnot. Širokou škálu případů je možné nalézt v [11].

V šesté kapitole je uveden přehled metod pro posouzení stability prutových konstrukcí podle ČSN EN 1993-1-1. Je zde rovněž uvedeno odvození, charakter tabulkových imperfekcí a objasnění použití imperfekce vypočtené z vlastního tvaru vybočení.

Kapitola sedm obsahuje porovnání posudků. Úvodem je srovnána odolnost prvku, který je posouzen pružně a plasticky. Plastická odolnost zde vychází vždy menší než pružná, při aplikaci tabulkových imperfekcí.

Pro samotné srovnání posudků byla vybrána sada prutů o proměnné štíhlosti. Na základě výsledků je patrné, že pro geometricky nelineární výpočty je vhodnější užití geometrické imperfekce, která vychází z vlastního tvaru vybočení. Tabulkové imperfekce prvky podceňují, zejména při vybočení kolmo na tuhou osu. Maximální odolnost z pevnostního posudku 2 je vždy shodná se stabilitním pojetím. Pevnostní pojetí (pevnostní posudek 2) tedy nemá při posudku pouze vzpěrného tlaku praktický význam, protože se navrhuje na hodnotu menší než 1,0 a není důležité, jestli je posouzení 0,80 či 0,95, protože výsledná zatížitelnost je shodná se stabilitním posudkem.

Propojení s experimenty ukázalo, že pevnostní posudek 2 popisuje skutečné chování prutu a vzpěrný tlak je kombinované namáhání tlaku a ohybu. Na základě tohoto chování lze hovořit o vzpěrnosti prutu, která popisuje náchylnost prvku k vybočení při různé hladině zatížení.

Byla snaha využít vzpěrnosti při kombinaci tlaku a ohybu jako příznivě působícího jevu a dosáhnout tak vyšší zatížitelnosti. Pro potvrzení této myšlenky byl proveden srovnávací výpočet na jednoduchém prutu s tlakovou silou a příčným zatížením a počátečním zakřivením. Výsledkem tohoto pokusu je fakt, že zatížitelnost ze stabilitního pojetí podle rovnice 6.61 /3/ a pevnostního přístupu s ekvivalentní geometrickou imperfekcí je shodná a příznivý vliv vzpěrnosti se zde neuplatní.

Srovnání výsledků posouzení na rámech ukazuje, že pevnostní posudky podle tabulkových imperfekcí a imperfekcí z vlastního tvaru vybočení jsou oproti jednoduchým prutům srovnatelné. Stabilitní pojetí je vždy nejbezpečnější. Pro každou vazbu byla stanovena hmotnost oceli, potřebná k návrhu sloupů. Lze si tak udělat představu o materiálové náročnosti jednotlivých vazeb.

Pro aplikaci pevnostního posouzení je nutné, aby byly všechny průřezy byly navrženy na účinky zatížení, protože geometricky nelineární analýza zohledňuje tuhosti profilů a navržené prvky v modelu výrazně ovlivňují průběhy vnitřních sil. Dalším požadavkem pevnostního posudku je, aby byl prvek zabezpečen proti klopení, protože pevnostní posouzení klopení je složité. Pevnostní pojetí dále nedokáže zohlednit zkroucení prvků a je nutný předběžný výpočet kritického zatížení pro všechny případy ztráty stability, aby bylo možné ověřit, že zkroucení prvku nebude rozhodovat. Obdobný postup by bylo nutné aplikovat při posudku jednoose symetrického profilu. Zcela nesymetrický profil není možné pevnostní cestou posoudit, protože v samotném způsobu vybočení vystupuje zkroucení.

Na základě popsaných výsledků a složitostí se lze domnívat, že pevnostní posudky v běžné inženýrské praxi nemají uplatnění. Pro praktické použití bude vhodné posouzení jednotlivých prvků jako izolované pruty za použití součinitelů vzpěrnosti a klopení. Výpočet vzpěrné délky je vhodný z kritického zatížení konstrukce, které lze získat ze stabilitního výpočtu v programu Scia Engineer. Výhodou stabilitního posouzení je navíc přehled o štíhlostech jednotlivých prvků a možnost superpozice.

Ale v případech, kdy deformace mění chování konstrukce, je výpočet podle teorie II. řádu výstižnější. Takovým příkladem, může být příčná vazba II. Jediným stabilizujícím prvkem je vetknutý sloup. Vlivem deformace vrcholů sloupů od vodorovného zatížení je vetknutý sloup přitížen vodorovnou složkou od svislé síly ve vrcholu kyvné stojky. Tento jev vzpěrná délka nezahrnuje, stabilitní výpočet by zde byl na straně nebezpečné a pevnostní posouzení je tedy vhodnější.

Hlavním cílem práce bylo seznámení se s možnostmi posouzení prutových soustav na vzpěr a získat představu o použitelnosti a výhodách jednotlivých přístupů. Autor si dovoluje tento cíl považovat za naplněný.

9 Bibliografie

1. **Šmiřák, Svatopluk.** *Pružnost a plasticita I.* Brno : Akademické nakladatelství CERM, 2006. 80-7204-468-0.
2. **NEMETSCHEK Scia.** [Online] [Citace: 10. březen 2014.] [http://www.scia-online.cz/download/Tutorialy/3.1_\(CZ_2008.1\)_Problematika_zadavani_vzpernych_delek.pdf](http://www.scia-online.cz/download/Tutorialy/3.1_(CZ_2008.1)_Problematika_zadavani_vzpernych_delek.pdf).
3. **ČSN EN 1993-1-1** *Navrhování ocelových konstrukcí - část 1.1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby; účinnost od 1. 1. 2007.*
4. **Novák Otakar, Hořejší Jiří.** *Statické tabulky pro stavební praxi.* Praha : SNTL - nakladatelství technické literatury, n.p., 1978. L 17-E1-IV-51/72076.
5. **Jiří, Lhoták.** *Problém stability a problém geometricky nelineárního řešení prutových soustav - 1. průběžná zpráva.* 1993.
6. **Gambhir, Murari Lal.** *Stability analysis and design of structures.* Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-05866-0.
7. **Sedlacek, G, Naumes. J.** *Excerpt from the background document to EN 1993-1-1.* 2009.
8. **NEMETSCHEK Scia.** [Online] [Citace: 15. březen 2014.] [http://downloads.scia-online.com/support/SciaEngineer/Manuals/2013/Training%20Manuals/\[Eng\]Advanced%20Professional%20Training%20Non%20linear%20and%20stability%202013.1.pdf](http://downloads.scia-online.com/support/SciaEngineer/Manuals/2013/Training%20Manuals/[Eng]Advanced%20Professional%20Training%20Non%20linear%20and%20stability%202013.1.pdf).
9. **Bártlová, Alice.** *Vzpěr prutových soustav.* Praha : SNTL-nakladatelství technické literatury, 1977.
10. **Šmiřák, Svatopluk.** *Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti.* Brno : autor neznámý, 1998.
11. **Studnička, Jiří.** *ocelové konstrukce.* Praha : Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03473-9.
12. **Macháček, Josef, a další.** *Navrhování ocelových konstrukcí.* Praha : Nová tiskárna Pelhřimova, 2009. IBSN978-80-87093-86-3.

Seznam použitých symbolů

A	plocha průřezu
a	příčný posun, deformace
c_f	výška příruby, která může vyboulit
c_w	výška stojiny, která může vyboulit
e	tabulková imperfekce zakřivení
e_r	zakřivení nahrazující vliv vlastního pnutí
e_o	ekvivalentní imperfekce zakřivení z vlastního tvaru vybočení
E	modul pružnosti v tlaku
F	zatěžující díla
F_p	příčná síla
f	pevnost
h	výška/šířka profilu
I	tuhost průřezu
i	poloměr setrvačnosti
k_{yy}	součinitel interakce
k_{II}	součinitel druhého řádu
L	systémová délka
L_{cr}	vzpěrná délka
M	ohybový moment
$M_{c,Rd}$	návrhová odolnost v prostém ohybu
m	hmotnost
$N_{b,Rd}$	návrhová odolnost ve vzpěru
N_{cr}	Eulerova kritická síla
N_{Rk}	charakteristická odolnost v prostém tlaku
t_w	tloušťka stojiny
t_f	tloušťka příruby
w_f	celková výchylka
w_m	maximální výchylka
w	průhyb, funkce průhybu
W	průřezový modul
α	součinitel imperfekce
α_{cr}	součinitel kritického zatížení
α_{ult}	násobek osových sil, při kterém je v nejvíce namáhaném průřezu dosaženo charakteristické odolnosti v prostém tlaku
β	součinitel vzpěrné délky
Υ_{m0}	součinitel spolehlivosti materiálu
Υ_{m1}	součinitel spolehlivosti materiálu pro stabilitní úlohy
ε	parametr prutu
λ	štíhlost
λ_1	srovnávací štíhlost
λ^-, λ_p	poměrná štíhlost
χ	součinitel vzpěrnosti
ψ	součinitel vystihující rozdělení napětí v průřezu
η_{cr}	pořadnice vlastního tvaru vybočení